

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ЛУГАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ ВЛАДИМИРА ДАЛЯ»

Антрацитовский институт геосистем и технологий

Кафедра инженерии и общеобразовательных дисциплин

УТВЕРЖДАЮ

Директор
Антрацитовского института
геосистем и технологий



доц. Крохмалёва Е.Г.
«04» _____ 2023 г.

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

по учебной дисциплине

Высшая математика

Направление подготовки 05.03.06 Экология и природопользование
Профиль Экологическая безопасность

Разработчики:

доцент

старший преподаватель

 Е.Г. Крохмалева
 А.А. Омельченко

ФОС рассмотрен и одобрен на заседании кафедры экономики и транспорта
от «14» 04 20 23 г., протокол № 9

Заведующий кафедрой

инженерии и общеобразовательных дисциплин  Е.Г. Крохмалёва

Антрацит 2023 г.

**Паспорт
фонда оценочных средств по учебной дисциплине
Высшая математика**

Перечень компетенций (элементов компетенций), формируемых в результате освоения учебной дисциплины (модуля)

№ п/п	Код контролируемой компетенции	Формулировка ка контролируемой компетенции	Контролируемые темы учебной дисциплины	Этапы формирования (семестр изучения)
1	ОПК-1	Способен применять естественнонаучные и общетеоретические знания, методы математического анализа и моделирования в профессиональной деятельности	Тема 1. Матрицы. Основные понятия. Операции над матрицами Тема 2. Определители. Определители второго, третьего и n-го порядка. Их вычисление. Свойства определителей. Тема 4. Обратная матрица. Матричные уравнения. Тема 5. Системы линейных алгебраических уравнений. Основные понятия. Теорема Кронекера - Капелли. Тема 6. Методы решения систем уравнений: метод Гаусса, метод Крамера, матричный метод. Тема 7. Однородные и неоднородные системы линейных алгебраических уравнений. Тема 11. Смешанное произведение векторов. Свойства, вычисление, геометрический смысл. Применения векторного исчисления к решению задач геометрии, механики, физики, электротехники. Тема 14. Общее уравнение линий второго порядка. Тема 17. Цилиндрические и конические поверхности. Поверхности вращения. Поверхности второго порядка. Тема 18. Понятие функции. Способы задания функций. Основные элементарные функции, их свойства и графики. Характеристика поведения функций. Тема 18. Понятие функции. Способы задания функций. Основные элементарные функции, их свойства и графики. Характеристика поведения функций. Тема 22. Точки разрыва функции. Классификация точек разрыва. Непрерывность основных элементарных функций. Тема 23. Производная функции, ее геометрический и механический смысл. Уравнения касательной и нормали. Дифференцируемость функции. Связь между дифференцируемостью и непрерывностью. Тема 24. Правила дифференцирования функций. Производная обратной функции. Производная	1, 2, 3, 4

		сложной функции. Тема 26. Дифференциал функции. Геометрический смысл дифференциала. Основные свойства дифференциалов. Инвариантность формы дифференциала первого порядка. Приближенные вычисления с помощью дифференциала. Дифференциалы высших порядков. Тема 27. Основные теоремы дифференциального исчисления (Ферма, Ролля, Лагранжа, Коши). Правила Лопиталя. Тема 30. Первообразная. Неопределенный интеграл и его свойства. Таблица интегралов. Простейшие методы интегрирования. Метод подстановки. Тема 31. Интегрирование по частям. Тема 32. Интегрирование рациональных дробей. Тема 33. Интегрирование тригонометрических дифференциалов, универсальная тригонометрическая подстановка. Интегрирование некоторых иррациональных выражений. Тема 38. Функции нескольких переменных. Область определения. Геометрическое изображение функции двух переменных. Предел, непрерывность функции нескольких переменных. Тема 41. Экстремумы функции двух переменных, необходимые и достаточные условия существования экстремума. Условный экстремум. Наименьшее и наибольшее значения функции в замкнутой области. Тема 42. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям. Основные понятия теории дифференциальных уравнений. Задача Коши, теорема существования и единственности решения задачи Коши. Особые решения. Дифференциальные уравнения первого порядка. Поле направлений. Интегральные кривые. Тема 51. Системы дифференциальных уравнений. Общие понятия. Методы решения. Тема 52. Общая схема построения интеграла по области. Геометрический и механический смысл. Основные свойства. Тема 54. Замена переменных в двойном интеграле. Приложения двойного интеграла. Тема 56. Тройной интеграл в цилиндрических и сферических координатах. Приложения тройного интеграла. Тема 59. Формула Грина. Приложения криволинейных интегралов. Тема 61. Поверхностные интегралы второго рода. Приложения поверхностных интегралов. Тема 62. Понятие комплексного числа. Комплексные числа в алгебраической,	
--	--	--	--

		тригонометрической и показательной формах. Действия над комплексными числами. Тема 63. Числовые ряды. Сходимость и сумма ряда. Необходимое условие сходимости. Признаки сравнения. Признаки Даламбера, корневой Коши, интегральный Коши. Тема 66. Ряд Тейлора и Маклорена. Разложение функций в степенные ряды. Применения степенных рядов в приближенных вычислениях. Тема 67. Ряды Фурье. Постановка задачи. Ряды Фурье для четных, нечетных функций, для функций с периодом 2π. Применение тригонометрических рядов Фурье в приближенных вычислениях. Тема 69. Случайные события. Алгебра событий, классификация событий в терминах теории вероятностей и теории множеств. Элементы комбинаторного анализа. Тема 69. Случайные события. Алгебра событий, классификация событий в терминах теории вероятностей и теории множеств. Элементы комбинаторного анализа. Тема 71. Классическое, статистическое определения вероятности. Геометрическая вероятность. Аксиомы вероятности. Тема 73. Последовательность независимых испытаний Бернулли. Формула Бернулли. Предельные теоремы в схеме Бернулли. Тема 74. Случайные величины. Формы закона распределения дискретной случайной величины и непрерывной случайной величины. Тема 80. Закон больших чисел: неравенство и теорема Чебышева, теоремы Бернулли и Ляпунова. Центральная предельная теорема. Тема 82. Генеральная совокупность. Выборка. Способы отбора, обеспечивающие репрезентативность выборки. Тема 82. Генеральная совокупность. Выборка. Способы отбора, обеспечивающие репрезентативность выборки. Тема 84. Двумерные случайные величины. Интегральный и дифференциальный законы. Числовые характеристики. Условия независимости случайных величин. Нормальный закон распределения на плоскости. Нормальная корреляция. Тема 85. Элементы теории корреляции: корреляционный момент, коэффициент корреляции, регрессия. Корреляционное отношение.	
--	--	---	--

**Показатели и критерии оценивания компетенций,
описание шкал оценивания**

№ п/п	Код контроли руемой компетен ции	Показатель оценивания (знания, умения, навыки)	Контролируемые темы учебной дисциплины	Наименование оценочного средства
1	ОПК-1	знать: способы применения естественнонаучных и общетехнических знаний, методов математического анализа и моделирования в профессиональной деятельности уметь: применять естественнонаучные и общетехнические знания, методы математического анализа и моделирования в профессиональной деятельности владеть навыками: применения естественнонаучных и общетехнических знаний, методов математического анализа и моделирования в профессиональной деятельности	Тема 1. – Тема 85.	опрос теоретического материала, выполнение практических работ, выполнение индивидуального задания.

**Фонды оценочных средств по дисциплине
«Высшая математика»**

Опрос теоретического материала (первый семестр)

Тема 1. Матрицы. Основные понятия. Операции над матрицами.

1. Понятие матрицы.
2. Типы матриц.
3. Способы представления матриц.
4. Арифметические операции над матрицами.
5. Свойства линейных операций.
6. Произведение матриц.
7. Свойства произведения.
8. Транспонирование матриц.
9. Элементарные преобразования матриц.
10. Эквивалентные матрицы.

Тема 2. Определители. Определители второго, третьего и n -го порядка.

Их вычисление. Свойства определителей.

1. Что называется определителем?
2. Свойства определителей.
3. Как вычисляются определители второго порядка?
4. Как вычисляются определители третьего порядка?
5. Правила нахождения определителей n -го порядка.
6. Что называется минором определителя n -го порядка?
7. Что называется алгебраическим дополнением определителя n -го порядка?
8. Разложение определителя по элементам некоторого ряда

Тема 3. Ранг матрицы. Эквивалентные преобразования матриц.

1. Что называется рангом матрицы.
2. Какие преобразования матрицы называются элементарными?
3. Что называется минором определителя n -го порядка?
4. Какой минор называется базисным?
5. Как определяется и находится ранг матрицы.
6. Свойства ранга матрицы.

Тема 4. Обратная матрица. Матричные уравнения.

1. Вырожденные и невырожденные матрицы.
2. Обратная матрица.
3. Свойства обратной матрицы.
4. Необходимое и достаточное условие существования обратной матрицы.
5. Матричные уравнения.
6. Решение матричных уравнений.

Тема 5. Системы линейных алгебраических уравнений. Основные понятия. Теорема Кронекера - Капелли.

1. Что представляет собой система линейных уравнений с n неизвестными?

2. Теорема Кронекера-Капелли.
3. Правило решения произвольной системы линейных уравнений.
4. Системы линейных алгебраических уравнений и их решение.
5. Условия совместности и несовместности для линейных систем.
6. Условия определенности и неопределенности для линейных систем.
7. Что называется решением системы линейных алгебраических уравнений?
8. Что называется матрицей и расширенной матрицей системы линейных алгебраических уравнений?
9. При каком условии система линейных алгебраических уравнений имеет единственное решение?
10. В каком случае однородная система n линейных уравнений с n неизвестными имеет ненулевое решение?

Тема 6. Методы решения систем уравнений: метод Гаусса, метод Крамера, матричный метод.

1. Методы решения систем линейных алгебраических уравнений.
2. Перечислите этапы метода Гаусса.
3. Как по методу Гаусса можно найти ранг системы линейных алгебраических уравнений?
4. Опишите исследование на совместность системы линейных алгебраических уравнений методом Гаусса.
5. В чем состоит матричный способ решения системы линейных алгебраических уравнений?
6. Какие прикладные задачи можно решать матричным способом?
7. В каком случае применимы формулы Крамера?
8. Назовите формулы Крамера.

Тема 7. Однородные и неоднородные системы линейных алгебраических уравнений.

1. Системы однородных линейных уравнений.
2. Фундаментальная система решений линейной однородной системы.
3. Общее решение однородной линейной системы.
4. Какие неизвестные называются базисными.
5. Какие неизвестные называются свободными.
6. Какие решения системы называются линейно независимыми.
7. Необходимость и достаточность существования ненулевых решений системы однородных линейных уравнений.
8. Какое решение называется нулевым или тривиальным.
9. Структура общего решения неоднородной линейной системы.
10. Что представляет собой общее решение неоднородной системы.

Тема 8. Векторы, основные определения. Линейные операции над векторами. Проекция вектора на ось. Координаты вектора, длина, направляющие косинусы.

1. Что такое вектор?
2. Равенство векторов.
3. Линейные операции над векторами.

4. Проекция вектора на ось.
5. Свойства проекций.
6. Разложение вектора по ортам.
7. Модуль и длина вектора.
8. Какие величины называются скалярными.
9. Направляющие косинусы.
10. Коллинеарность векторов.
11. Координаты точки.
12. Координаты вектора.

Тема 9. Скалярное произведение векторов, его свойства, вычисление.

1. Скалярное произведение векторов.
2. Свойства скалярного произведения.
3. Что называется скалярным квадратом вектора.
4. Выражение скалярного произведения через координаты.
5. Угол между векторами.
6. Условие перпендикулярности векторов.
7. Проекция вектора на заданное направление.
8. Механический смысл скалярного произведения.

Тема 10. Векторное произведение векторов, его свойства, вычисление.

1. Векторное произведение векторов.
2. Выражение векторного произведения через координаты.
3. Свойства векторного произведения.
4. Модуль векторного произведения.
5. Условие коллинеарности векторов.
6. Нахождение площади параллелограмма и треугольника.
7. Геометрический смысл векторного произведения.
8. Механический смысл векторного произведения.

Тема 11. Смешанное произведение векторов. Свойства, вычисление, геометрический смысл. Применения векторного исчисления к решению задач геометрии, механики, физики, электротехники.

1. Смешанное произведение трех векторов.
2. Геометрический смысл смешанного произведения.
3. Свойства смешанного произведения.
4. Правая и левая тройка векторов.
5. Выражение смешанного произведения через координаты.
5. Определение взаимной ориентации векторов в пространстве.
7. Компланарность векторов.
8. Определение объемов параллелепипеда и треугольной пирамиды.

Тема 12. Системы координат на плоскости. Уравнение линии на плоскости. Прямая на плоскости. Угол между прямыми. Расстояние от точки до прямой. Условия параллельности и перпендикулярности прямых.

1. Основные понятия системы координат на плоскости.
2. Расстояние между двумя точками.

3. Деление отрезка в данном отношении и пополам.
4. Площадь треугольника.
5. Преобразование системы координат.
6. Уравнение прямой с угловым коэффициентом.
7. Общее уравнение прямой.
8. Уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении.
9. Уравнение прямой, проходящей через две точки.
10. Уравнение прямой в отрезках.
11. Уравнение прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору.
12. Полярное уравнение прямой.
13. Нормальное уравнение прямой.
14. Угол между двумя прямыми.
15. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых.
16. Расстояние от точки до прямой.

Тема 13. Кривые второго порядка: окружность, эллипс, гипербола, парабола. Их геометрические свойства и уравнения.

1. Линии второго порядка на плоскости.
2. Определение окружности. Уравнение окружности.
3. Эллипс: определение эллипса, фокусы, вершины, оси, полуоси, эксцентриситет, директрисы эллипса, каноническое уравнение эллипса.
4. Исследование формы эллипса по его уравнению.
5. Гипербола: определение гиперболы, фокусы, вершины, центр, действительные и мнимые оси и полуоси, эксцентриситет, фокальные радиусы, директрисы, асимптоты гиперболы, основной прямоугольник гиперболы, каноническое уравнение гиперболы.
6. Уравнение равносторонней гиперболы, асимптотами которой служат оси координат.
7. Сопряженные гиперболы.
8. Исследование формы гиперболы по ее уравнению.
9. Парабола: определение параболы, фокус, директриса, вершина параболы, фокальный радиус точки, каноническое уравнение параболы.
10. Исследование форм параболы по ее уравнению.

Тема 14. Общее уравнение линий второго порядка.

1. Уравнение кривых второго порядка с осями симметрии, параллельными координатным осям.
2. Единое уравнение для окружности, эллипса, гиперболы и параболы.
3. Общее уравнение второго порядка.
4. Случаи вырождения эллипса, гиперболы и параболы.

Тема 15. Плоскость и прямая в пространстве.

1. Уравнение поверхности. Текущие координаты точек поверхности.
2. Уравнение сферы.
3. Уравнения линии в пространстве.
4. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно

данному вектору.

5. Общее уравнение плоскости.
6. Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки.
7. Уравнение плоскости в отрезках.
8. Нормальное уравнение плоскости в векторной форме.
9. Нормальное уравнение плоскости в координатной форме.
10. Векторное уравнение прямой.
11. Параметрические уравнения прямой.
12. Канонические уравнения прямой.
13. Уравнение прямой в пространстве, проходящей через две точки.
14. Общие уравнения прямой.

Тема 16. Взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве.

1. Угол между двумя плоскостями.
2. Условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей.
3. Угол между прямыми.
4. Условия параллельности и перпендикулярности прямых.
5. Условие, при котором две прямые лежат в одной плоскости.
6. Угол между прямой и плоскостью
7. Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости.
8. Пересечение прямой с плоскостью.
7. Условие принадлежности прямой плоскости.
8. Расстояние от точки до плоскости.

Тема 17. Цилиндрические и конические поверхности. Поверхности вращения. Поверхности второго порядка.

1. Цилиндрические поверхности. Направляющая и образующая цилиндра.
2. Эллиптический, круговой, параболический и гиперболический цилиндры.
3. Поверхности вращения. Конические поверхности.
4. Канонические уравнения поверхностей второго порядка.
5. Эллипсоид.
6. Однополостный гиперболоид.
7. Двухполостный гиперболоид.
8. Эллиптический параболоид.
9. Гиперболический параболоид.
10. Конус второго порядка.

Опрос теоретического материала (второй семестр)

Тема 18. Понятие функции. Способы задания функций. Основные элементарные функции, их свойства и графики. Характеристика поведения функций.

1. Что называется функцией?
2. Что называется аргументом функции?
3. Что называется значением функции?
4. Что называется областью определения функции?

5. Что называется областью изменения функции?
6. Способы задания функции.
7. Какая функция называется возрастающей (убывающей)?
8. Какие функции называются монотонными?
9. Какая функция называется ограниченной?
10. Какая функция называется четной (нечетной)?
11. Какая функция называется периодической?
12. Какие функции относятся к основным или простейшим?

Тема 19. Предел переменной величины. Свойства пределов. Бесконечно малые и бесконечно большие величины. Их свойства. Связь переменной, предела и бесконечно малой.

1. Что называются последовательностью?
2. Какая последовательность называется ограниченной сверху (снизу)?
3. Предел переменной величины.
4. Свойства пределов.
5. Бесконечно малые и бесконечно большие величины.
6. Связь переменной, предела и бесконечно малой.
7. Понятие числовой последовательности
8. Что называется пределом числовой последовательности.
9. Сходящиеся и расходящиеся последовательности.
10. Свойства сходящихся последовательностей.

Тема 20. Предел функции. Основные теоремы о пределах. Односторонние пределы. Математические неопределенности.

1. Приращение аргумента и приращение функции.
2. Определение предела функции в точке.
3. Основные теоремы о пределах.
4. Односторонние пределы.
5. Пределы функции при $x \rightarrow \infty$.
6. Бесконечно большие и бесконечно малые функции и их основные свойства.
7. Связь бесконечно больших и бесконечно малых функций.
8. Признаки существования пределов.
9. Раскрытие неопределенностей вида $\left[\frac{0}{0} \right], \left[\frac{\infty}{\infty} \right]$.
10. Раскрытие неопределенностей вида $[\infty - \infty], [1^\infty]$.

Тема 21. Замечательные пределы. Эквивалентные бесконечно малые функций.

1. Замечательные пределы.
2. Основные соотношения при использовании замечательных пределов.
3. Сравнение бесконечно малых функций.
4. Понятие эквивалентных бесконечно малых функций.
5. Свойства эквивалентных бесконечно малых функций.
6. Применение эквивалентных бесконечно малых функций при вычислении пределов.

Тема 22. Непрерывность функции в точке и на множестве. Точки разрыва функции. Классификация точек разрыва. Непрерывность основных элементарных функций.

1. Определение непрерывности функции в точке.
2. Свойства функций, непрерывных в точке.
3. Непрерывность элементарных функций на отрезке.
4. Понятие точки разрыва.
5. Классификация точек разрыва.
6. Непрерывность элементарных функций.
7. Непрерывность сложной функции.
8. Непрерывность обратной функции.

Тема 23. Производная функции, ее геометрический и механический смысл. Уравнения касательной и нормали. Дифференцируемость функции. Связь между дифференцируемостью и непрерывностью.

1. Определение производной функции в точке.
2. Какая функция называется дифференцируемой.
3. Определение касательной к кривой в точке.
4. Геометрический и механический смысл производной.
5. Уравнения касательной и нормали.
6. Связь между дифференцируемостью и непрерывностью.

Тема 24. Правила дифференцирования функций. Производная обратной функции. Производная сложной функции.

1. Правила дифференцирования функций и их следствия.
2. Формулы дифференцирования функций.
3. Производная обратной функции.
4. Производная сложной функции.
5. Производные основных элементарных функций.
6. Гиперболические функции и их производные.

Тема 25. Вычисление производных основных элементарных функций. Таблица производных. Дифференцирование неявно и параметрически заданных функций. Производные высших порядков.

1. Таблица производных основных элементарных функций.
2. Дифференцирование неявно заданных функций.
3. Логарифмическое дифференцирование.
4. Дифференцирование параметрически заданных функций.
5. Производные высших порядков явно заданной функции.
6. Механический смысл производной второго порядка.
7. Производные высших порядков неявно заданных функций.
8. Производные высших порядков от функций, заданных параметрически.

Тема 26. Дифференциал функции. Геометрический смысл

дифференциала. Основные свойства дифференциалов. Инвариантность формы дифференциала первого порядка. Приближенные вычисления с помощью дифференциала. Дифференциалы высших порядков.

1. Определение дифференциала функции.
2. Геометрический смысл дифференциала.
3. Основные теоремы о дифференциалах.
4. Инвариантность формы дифференциала первого порядка.
5. Приближенные вычисления с помощью дифференциала.
6. Дифференциалы высших порядков.

Тема 27. Основные теоремы дифференциального исчисления (Ферма, Ролля, Лагранжа, Коши). Правила Лопиталя.

1. Теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа и Коши и их геометрическая интерпретация.
2. Следствия из теоремы Лагранжа.
3. Правила Лопиталя.
4. Условия применения и формы представления правил Лопиталя.

Тема 28. Применение производных к исследованию поведения функций. Условия постоянства, возрастания и убывания функций на промежутке. Необходимые и достаточные условия существования экстремума. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке. Формула Тейлора. Выпуклость - вогнутость, точки перегиба графика функции. Достаточные условия выпуклости - вогнутости. Условия существования точки перегиба графика функции.

1. Условия постоянства, возрастания и убывания функций на промежутке.
2. Понятие стационарных и критических точек функции и их геометрическая интерпретация.
3. Понятие монотонности функции, связь с касательными.
4. Экстремумы функции и их типы.
5. Понятие гладкой функции.
6. Необходимые и достаточные условия существования экстремума.
7. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке.
8. Выпуклость - вогнутость, точки перегиба графика функции.
9. Необходимое и достаточное условие существования точки перегиба.
10. Условия выпуклости - вогнутости.
11. Достаточное условие существования точки перегиба графика функции.
12. Понятие выпуклой функции, типы выпуклости.
13. Понятие асимптоты графика функции.
14. Типы асимптот и способы их построения.

Тема 29. Общий план исследования функций и построения графиков.

1. Как найти область существования функции?
2. Как найти точки пересечения графика с координатными осями?
3. Как найти интервалы знакопостоянства функции.
4. Как определить периодичность, четность и нечетность.
5. Как найти точки разрыва функции и исследовать их характер.

6. Какие свойства графика функции определяют с помощью первой производной.
7. Какие свойства графика функции определяют с помощью второй производной.
8. Как найти асимптоты графика функции.

Тема 30. Первообразная. Неопределенный интеграл и его свойства. Таблица интегралов. Простейшие методы интегрирования. Метод подстановки.

1. Что называется первообразной функции?
2. Дайте определение неопределенного интеграла.
3. Геометрический смысл совокупности первообразных функций.
4. В чем заключается метод непосредственного интегрирования.
5. Сформулируйте основные свойства неопределенного интеграла.
6. В чем заключается метод интегрирования подстановкой.

Тема 31. Интегрирование по частям.

1. В чем состоит метод интегрирования по частям.
2. Типы интегралов, которые интегрируются по частям.
3. Назовите формулу интегрирования по частям в неопределенном интеграле.
4. Выведите формулу интегрирования по частям.

Тема 32. Интегрирование рациональных дробей.

1. Какие функции называются рациональными?
2. Что называется правильной рациональной дробью?
3. Какую функцию называют дробно-рациональной?
4. Как можно представить неправильную рациональную дробь?
5. Как можно представить правильную рациональную дробь?
6. Общее правило интегрирования рациональных дробей.

Тема 33. Интегрирование тригонометрических дифференциалов, универсальная тригонометрическая подстановка. Интегрирование некоторых иррациональных выражений.

1. Какая подстановка называется универсальной тригонометрической подстановкой?
2. Правила применения тригонометрических подстановок.
3. Типы интегралов, к которым применима тригонометрическая подстановка.
4. Правила интегрирования иррациональных функций.

Тема 34. Задачи, приводящие к определенному интегралу. Определенный интеграл как предел интегральных сумм, его смысл в различных задачах. Основные свойства определенного интеграла. Теорема о среднем.

1. Какую фигуру называют криволинейной трапецией?
2. Какую сумму называют интегральной суммой?
3. Дайте определение определенного интеграла.
4. Сформулировать теорему существования определенного интеграла.
5. Основные свойства определенного интеграла.

6. Геометрический и физический смысл определенного интеграла.

Тема 35. Интеграл с переменным верхним пределом. Формула Ньютона-Лейбница. Вычисление определенных интегралов.

1. Сформулировать формулу Ньютона-Лейбница.
2. Метод интегрирования по частям определенном интеграле.
3. Метод замены переменной в определенном интеграле.
4. Интегрирование четных и нечетных функций в симметричных пределах.
5. Схемы применимости определенного интеграла.
6. Вычисление площадей плоских фигур с помощью определенного интеграла.

Тема 36. Несобственные интегралы с бесконечными пределами (1-го рода) и от неограниченных функций (2-го рода), их основные свойства.

1. Дайте определение несобственного интеграла первого рода (интеграл, у которого один предел бесконечен).
2. Дайте определение несобственного интеграла второго рода (интеграл то неограниченной функции).
3. Признак сравнения несобственного интеграла первого рода.
4. Признак абсолютной сходимости несобственного интеграла первого рода.
5. Признаки сходимости несобственного интеграла второго рода.
6. При выполнении какого условия несобственный интеграл второго рода называется абсолютно сходящимся?

Тема 37. Приближенное вычисление определенных интегралов. Приложения определенного интеграла к задачам геометрии, механики, физики.

1. Перечислить наиболее применяемые формулы приближенного вычисления определенных интегралов.
2. Приближенное вычисление определенных интегралов с помощью формулы средних прямоугольников.
3. Приближенное вычисление определенных интегралов с помощью формулы трапеций.
4. Приближенное вычисление определенных интегралов с помощью формулы парабол.
5. Вычисление объёма тела вращения с помощью определенного интеграла.
6. Вычисление площади поверхности тел вращения с помощью определенного интеграла.
7. Вычисление длины дуги плоской кривой с помощью определенного интеграла.
8. Механические приложения определенного интеграла.

Тема 38. Функции нескольких переменных. Область определения. Геометрическое изображение функции двух переменных. Предел, непрерывность функции нескольких переменных.

1. Что называется функцией двух переменных?
2. Что называется областью определения функции двух переменных?
3. Что называется аргументами функции двух переменных?
4. Что называется областью изменения функции?

5. Что называют границей области?
6. Линии и поверхности уровня.
7. Предел функции нескольких переменных.
8. Непрерывность функции нескольких переменных в точке.
9. Что называется точкой разрыва функции?
10. Что называется поверхностью разрыва функции?

Тема 39. Частные производные функции нескольких переменных, их геометрический смысл. Полный дифференциал. Применение дифференциала в приближенных вычислениях.

1. Что называется частной производной функции?
2. Как определяется частная производная функции нескольких переменных?
3. Геометрическая интерпретация частных производных функции двух переменных.
4. Что называется полным приращением функции?
5. Необходимое условие дифференцируемости функции.
6. Достаточное условие дифференцируемости функции.
7. Что называется полным дифференциалом функции?
8. Применение дифференциала к приближенным вычислениям.

Тема 40. Дифференцирование функций, заданных неявно. Дифференцирование сложной функции.

1. Какая функция называется сложной?
2. Понятие полной производной.
3. Инвариантность формы дифференциала.
4. Какая функция называется неявной?
5. Теорема существования неявных функций.
6. Производные и дифференциалы высших порядков.

Тема 41. Экстремумы функции двух переменных, необходимые и достаточные условия существования экстремума. Условный экстремум. Наименьшее и наибольшее значения функции в замкнутой области.

1. Какая точка называется точкой максимума функции двух переменных?
2. Какая точка называется точкой минимума функции двух переменных?
3. Какие точки называются точками экстремума функции двух переменных?
4. Какие точки называются стационарными точками функции двух переменных?
5. Сформулировать необходимые условия экстремума.
6. Сформулировать достаточные условия экстремума.
7. Что называется условным экстремумом?
8. Как определить наибольшее и наименьшее значения функции на множестве D ?

Тема 42. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям.

Основные понятия теории дифференциальных уравнений. Задача Коши, теорема существования и единственности решения задачи Коши. Особые решения. Дифференциальные уравнения первого порядка. Поле направлений. Интегральные кривые.

1. Что называется дифференциальным уравнением?
2. Какое дифференциальное уравнение называется обыкновенным?
3. Что называется порядком дифференциального уравнения?
4. Понятие интегральной кривой дифференциального уравнения.
5. Понятие семейства интегральных кривых.
6. Какое решение называется общим решением дифференциального уравнения?
7. Какое решение называется частным решением дифференциального уравнения?
8. Какая задача называется задачей Коши?
9. Теорема существования и единственности решения задачи Коши.
10. Общее решение дифференциального уравнения первого порядка.

Тема 43. Дифференциальные уравнения первого порядка: с разделяющимися переменными, однородные, линейные, Бернулли, уравнения в полных дифференциалах.

1. Какое дифференциальное уравнение называется уравнением с разделяющимися переменными?
2. Решение задачи Коши для уравнения с разделяющимися переменными.
3. Какое дифференциальное уравнение называется линейным дифференциальным уравнением первого порядка?
4. Какое дифференциальное уравнение называется уравнением Бернулли?
5. Метод решения уравнения Бернулли.
6. Какое дифференциальное уравнение называется однородным дифференциальным уравнением первого порядка?
7. Какое дифференциальное уравнение называется уравнением в полных дифференциалах?
8. Решение задачи Коши для уравнения в полных дифференциалах.

Тема 44. Дифференциальные уравнения высших порядков, понятия решения общего и частного. Задача Коши, геометрический смысл. Уравнения, допускающие понижение порядка. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям.

1. Какое дифференциальное уравнение называется дифференциальным уравнением n -го порядка?
2. Какие решения называются общим и частным решением дифференциального уравнения n -го порядка?
3. Задача Коши для дифференциальных уравнений n -го порядка.
4. Теорема существования и единственности задачи Коши.
5. Метод понижения порядка.
6. Типы дифференциальных уравнений, допускающих понижение порядка.

Тема 45. Линейно-зависимые и линейно-независимые функции.

Определитель Вронского. Условия линейной зависимости и независимости системы функций на отрезке.

1. Какие функции называются линейно-зависимыми?
2. Какие функции называются линейно-независимыми?
3. Определитель Вронского и его свойства.
4. Теоремы для определения линейно-зависимых и линейно-независимых функций.

Тема 46. Линейные однородные дифференциальные уравнения n -го порядка. Структура общего решения.

1. Понятие линейного однородного и неоднородного дифференциального уравнения n -го порядка.
2. Общий вид линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка
3. Что определяет фундаментальную систему решений линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка?
4. Теорема о структуре общего решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка.
5. Структура общего решения линейных однородных дифференциальных уравнений n -го порядка.

Тема 47. Решение линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

1. Общий вид линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.
2. Какое уравнение называется характеристическим уравнением?
3. Нахождение общего решения характеристического уравнения.
4. Зависимость вида общего решения заданного дифференциального уравнения от значений корней характеристического уравнения.
5. Интегрирование линейных однородных дифференциальных уравнений n -го порядка с постоянными коэффициентами.

Тема 48. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения n -го порядка с постоянными коэффициентами. Структура общего решения.

1. Общий вид линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка.
2. Какое уравнение называется соответствующим однородным уравнением?
3. Теорема о структуре общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка.

Тема 49. Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа).

1. В чем состоит метод Лагранжа?
2. Общее и частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка.
3. Теорема о наложении решений.

Тема 50. Метод неопределенных коэффициентов нахождения частного

решения линейных неоднородных дифференциальных уравнений со специальной правой частью.

1. Общий вид линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами со специальной правой частью.
2. Способы нахождения частного решения по "специальному виду" правой части.
3. Суть метода неопределенных коэффициентов.
4. Правила нахождения частного решения в зависимости от вида корней характеристического уравнения.

Тема 51. Системы дифференциальных уравнений. Общие понятия. Методы решения.

1. Что называется системой дифференциальных уравнений?
2. Какие системы называются каноническими?
3. Какая система называется нормальной системой дифференциальных уравнений?
4. Что является решением системы дифференциальных уравнений?
5. Что называется общим решением системы дифференциальных уравнений?
6. Задача Коши для системы дифференциальных уравнений.
7. Теорема о существовании и единственности решения задачи Коши.
8. Решение нормальных систем дифференциальных уравнений методом интегрируемых комбинаций.
9. Решение нормальных систем дифференциальных уравнений методом исключений.
10. Решение систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Опрос теоретического материала (третий семестр)

Тема 52. Общая схема построения интеграла по области. Геометрический и механический смысл. Основные свойства.

1. Что называется интегральной суммой?
2. Что называется кратным интегралом?
3. Теорема существования кратного интеграла.
4. Перечислите основные свойства кратных интегралов.

Тема 53. Двойной интеграл. Свойства двойного интеграла. Вычисление двойного интеграла в декартовых координатах. Вычисление двойного интеграла в полярных координатах.

1. Определение двойного интеграла
2. Что называется диаметром области?
3. Теорема существования.
4. Перечислите свойства двойного интеграла.
5. Как вычислить двойной интеграл в прямоугольных декартовых координатах?
6. Как вычислить двойной интеграл в полярных координатах?

Тема 54. Замена переменных в двойном интеграле. Приложения двойного интеграла.

1. Что называется изменением порядка интегрирования?
2. Как выполнить замену переменных в прямоугольных декартовых координатах?
3. Приложения двойного интеграла к задачам геометрии.
4. Приложения двойного интеграла к задачам механики.

Тема 55. Тройной интеграл. Вычисление тройного интеграла в декартовых координатах. Замена переменных в тройном интеграле.

1. Понятие тройного интеграла.
2. Перечислите основные свойства тройного интеграла.
3. К чему сводится вычисление тройного интеграла?
4. Геометрический смысл двойного интеграла?
5. Что называется правильной пространственной областью?

Тема 56. Тройной интеграл в цилиндрических и сферических координатах. Приложения тройного интеграла.

1. Как вычислить тройной интеграл в декартовых координатах?
2. Как вычислить тройной интеграл в цилиндрических координатах?
3. Как вычислить тройной интеграл в сферических координатах?
4. Что вычисляют с помощью тройного интеграла?

Тема 57. Криволинейный интеграл первого рода. Вычисление криволинейного интеграла первого рода.

1. Определение криволинейных интегралов первого рода.
2. Свойства криволинейного интеграла первого рода.
3. От чего зависит криволинейный интеграл первого рода?
4. Как вычислить криволинейный интеграл первого рода для линии, заданной параметрическими уравнениями?
5. Как вычислить криволинейный интеграл первого рода если линия плоская и задана в декартовой системе координат?

Тема 58. Криволинейный интеграл второго рода. Вычисление криволинейного интеграла второго рода. Независимость криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования.

1. Определение криволинейных интегралов второго рода.
2. Свойства криволинейного интеграла второго рода.
3. Как вычислить криволинейный интеграл второго рода для линии, заданной параметрическими уравнениями?
4. Как вычислить криволинейный интеграл второго рода если линия плоская и задана в декартовой системе координат?

Тема 59. Формула Грина. Приложения криволинейных интегралов.

1. Какую связь устанавливает формула Грина?
2. Независимость криволинейного интеграла 2^{го} рода от формы пути

интегрирования

3. Приложения криволинейных интегралов.

Тема 60. Поверхностные интегралы первого рода.

1. Что называется поверхностным интегралом первого рода?
2. Как вычислить поверхностный интеграл первого рода?
3. Свойства поверхностного интеграла первого рода.

Тема 61. Поверхностные интегралы второго рода. Приложения поверхностных интегралов.

1. Что называется поверхностным интегралом второго рода?
2. Как вычислить поверхностный интеграл второго рода?
3. Свойства поверхностного интеграла второго рода.
4. Формула Стокса.
5. Формула Остроградского-Гаусса.
6. Приложения поверхностных интегралов.

Тема 62. Понятие комплексного числа. Комплексные числа в алгебраической, тригонометрической и показательной формах. Действия над комплексными числами.

1. Что называется комплексным числом?
2. Что называется действительной частью комплексного числа?
3. Что называется алгебраической формой комплексного числа?
4. Что называется комплексной плоскостью?
5. Что называется модулем комплексного числа?
6. Что называется тригонометрической формой комплексного числа?
7. Действия над комплексными числами.
8. Какими формами записи обладает комплексное число?

Тема 63. Числовые ряды. Сходимость и сумма ряда. Необходимое условие сходимости. Признаки сравнения. Признаки Даламбера, корневой Коши, интегральный Коши.

1. Что называется числовым рядом?
2. Что называется суммой ряда?
3. Что называется остатком ряда?
4. Какой ряд называется гармоническим?
5. Признаки сравнения.
6. Признак Даламбера.
7. Радикальный признак Коши.
8. Интегральный признак Коши.

Тема 64. Знакопередающие ряды. Признак Лейбница. Абсолютная и

условная сходимость. Оценка погрешности, допущенной при замене ряда частичной суммой. Элементы функционального анализа. Функциональные ряды. Область сходимости, методы ее определения. Теоремы о непрерывности суммы, о дифференцируемости и интегрируемости равномерно сходящихся функциональных рядов.

1. Какой ряд называется знакопеременным?
2. Какой ряд называется знакочередующимся?
3. Теорема Лейбница.
4. Какой ряд называется абсолютно сходящимся?
5. Какой ряд называется условно сходящимся?
6. Свойства абсолютно и условно сходящихся рядов.
7. Какой ряд называется функциональным?
8. Что называется областью сходимости функционального ряда?

Тема 65. Степенные ряды. Интервал и область сходимости степенных рядов.

1. Какой ряд называется степенным?
2. Что называется суммой степенного ряда?
3. Что называется областью сходимости степенного ряда?
4. Сформулируйте теорему Абеля.
5. Что называется радиусом сходимости?
6. Что называется интервалом сходимости?

Тема 66. Ряд Тейлора и Маклорена. Разложение функций в степенные ряды. Применения степенных рядов в приближенных вычислениях.

1. Какой ряд называется рядом Тейлора?
2. Необходимое и достаточное условие сходимости ряда Тейлора?
3. Какой ряд называется рядом Маклорена?
4. Какие приемы используют для разложения функции в степенной ряд Маклорена?
5. Какие приемы используют для приближенного вычисления значения функции в некоторой точке?

Тема 67. Ряды Фурье. Постановка задачи. Ряды Фурье для четных, нечетных функций, для функций с периодом $2l$. Применение тригонометрических рядов Фурье в приближенных вычислениях.

1. Какой ряд называется рядом Фурье?
2. Что называется членами ряда?
3. Как определяются коэффициенты ряда?
4. Как разложить периодическую функцию в ряд Фурье?

Тема 68. Разложение непериодических функций в ряд Фурье. Понятия о преобразовании и интеграле Фурье.

1. При каком условии функция разложима в ряд Фурье?
2. Сформулируйте теорему Дирихле.
3. Как разложить непериодическую функцию в ряд Фурье?

Опрос теоретического материала (четвертый семестр)

Тема 69. Случайные события. Алгебра событий, классификация событий в терминах теории вероятностей и теории множеств. Элементы комбинаторного анализа.

1. Что называется событием?
2. Какое событие называется случайным событием?
3. Пространство элементарных событий. Операции над событиями.
4. Какое событие называется достоверным событием?
5. Какое событие называется невозможным событием?
6. Какое событие называется равновозможным?
7. Какие события называются попарно несовместимые?
8. Какие события называются сложными?
9. Сумма, произведение, разность событий.
10. Полная группа событий. Противоположные события.
11. Основные формулы комбинаторики.

Тема 70. Элементарная теория вероятностей и ее математические основы: различные подходы к определению вероятности события. Частота события.

1. Что называется вероятностью случайного события?
2. Что называется относительной статистической частотой наступления события?
3. Что называется вероятностью события?
4. Что является мерой возможности появления события?
5. Что определяет средний процент появления события?
6. Статистический подход к понятию вероятности

Тема 71. Классическое, статистическое определения вероятности. Геометрическая вероятность. Аксиомы вероятности.

1. Классическое определение вероятности
2. Статистическое определение вероятности случайного события.
3. Аксиоматическое определение вероятности.
4. Основные свойства вероятности
5. В чем состоит различие между классическим и статистическим определениями вероятности?
6. Каковы условия существования статистической вероятности события A ?
7. Почему существует несколько определений вероятности?

Тема 72. Теоремы сложения и умножения вероятностей. Условные вероятности. Формула полной вероятности. Формулы Байеса.

1. Совместные и несовместные случайные события.
2. Условная вероятность.
3. Независимые события.
4. Вероятность наступления хотя бы одного из n событий, независимых в совокупности.
5. Сформулируйте теорему умножения событий.
6. Сформулируйте теорему сложения событий.

7. Дайте определение условной вероятности.
8. Формула полной вероятности.
9. Какие вероятности вычисляются по формуле Байеса?

Тема 73. Последовательность независимых испытаний Бернулли. Формула Бернулли. Предельные теоремы в схеме Бернулли.

1. В чем состоит формула Бернулли? Что называется сочетанием?
2. Чем сочетание отличается от размещения?
3. Чем отличаются локальная и интегральная теоремы Лапласа? В каких случаях они применяются?
4. Что называется наивероятнейшим числом?
5. Какие вероятности вычисляются по формуле Бернулли?

Тема 74. Случайные величины. Формы закона распределения дискретной случайной величины и непрерывной случайной величины.

1. Определение случайной величины.
2. Классическое и статистическое определение вероятности случайного события.
3. Свойства вероятности случайных событий.
4. Функция распределения случайной величины и ее свойства.
5. Какую случайную величину называют дискретной?
6. Какую случайную величину называют непрерывной?

Тема 75. Основные числовые характеристики случайных величин: мода, медиана, математическое ожидание, дисперсия, их свойства.

1. Что называют модой?
2. Что называют медианой?
3. Что называют математическим ожиданием?
4. Перечислите свойства математического ожидания.
3. Что называют математическим ожиданием дискретной случайной величины?
5. Что называют математическим ожиданием непрерывной случайной величины?
6. Что называется средним квадратическим отклонением?
7. Что называется дисперсией?
8. Перечислите свойства дисперсии.

Тема 76. Теоретические начальные и центральные моменты. Понятие квантили и критической точки. Функция одного случайного аргумента.

1. Что называют начальным моментом?
2. Что называют центральным моментом?
3. Что характеризуют моменты?
4. Какую функцию называют функцией надёжности?
5. Характеристическое свойство показательного закона надёжности.

Тема 77. Начальные и центральные моменты высших порядков.

Функции случайных величин.

1. Какую функцию называют функцией распределения?
2. Свойства функции распределения.
3. Что называют плотностью распределения вероятностей непрерывной случайной величины?
4. Что называют начальным теоретическим моментом порядка k ?
5. Что называют центральным теоретическим моментом порядка k ?
6. Связь между начальным и центральным теоретическим моментом.

Тема 78. Биномиальное распределение. Распределение Пуассона. Распределение Эрланга.

1. Какую случайную величину называют дискретной?
2. Что называют законом распределения дискретной случайной величины?
3. Что называют биномиальным законом распределения дискретной случайной величины?
4. Какая фигура называется многоугольником распределения?
5. Когда говорят, что случайная величина распределена по закону Пуассона?

Тема 79. Показательное распределение. Равномерное распределение. Нормальное распределение.

Какое распределение вероятностей непрерывной случайной величины называется равномерным?

Какое распределение вероятностей непрерывной случайной величины называется нормальным?

Тема 80. Закон больших чисел: неравенство и теорема Чебышева, теоремы Бернулли и Ляпунова. Центральная предельная теорема.

1. Какие условия применения закона больших чисел?
2. Сформулировать неравенство Чебышева.
3. Сформулировать теорему Чебышева.
4. Сформулировать теорему Бернулли.
5. Сформулировать теорему Ляпунова.
6. Сформулировать центральную предельную теорему.

Тема 81. Математическая статистика. Модели случайных процессов. Статистические методы обработки экспериментальных данных.

1. Что называется математической статистикой?
2. Что относятся к основным задачам математической статистики?
3. Что называется статистическим распределением выборки?
4. Что называется вариационным рядом?
5. Что называется выборкой?
6. Какие методы называются статистическими?

Тема 82. Генеральная совокупность. Выборка. Способы отбора,

обеспечивающие репрезентативность выборки.

1. Что такое генеральная и выборочная совокупности?
2. Числовые характеристики генеральной и выборочной совокупностей.
3. Сущность выборочного метода.
4. Сущность теории оценивания. Точечные и интервальные оценки параметров.
5. Свойства точечных оценок.
6. Что такое статистическая гипотеза?
7. Нулевая и альтернативная гипотезы.
8. Статистический критерий. Критическая область.

Тема 83. Статистический ряд. Эмпирическое распределение. Полигон. Гистограмма. Среднее значение, разброс.

1. Что называется статистическим распределением выборки?
2. Что называется полигоном частот?
3. Что называется гистограммой частот?
4. Какую функцию называют эмпирической функцией распределения?
5. Для чего служит эмпирическая функция распределения выборки?
- Что называют оценками?

Тема 84. Двумерные случайные величины. Интегральный и дифференциальный законы. Числовые характеристики. Условия независимости случайных величин. Нормальный закон распределения на плоскости. Нормальная корреляция.

1. Какую функцию называют функцией двух случайных аргументов?
2. Чему равна вероятность попадания случайной точки в некоторую область для независимых случайных величин X и Y ?
3. Какую функцию называют функцией случайного аргумента?
4. Чем отличаются дискретные и случайные величины?
5. Что называют нормальной корреляцией?
6. Назовите условия независимости случайных величин.

Тема 85. Элементы теории корреляции: корреляционный момент, коэффициент корреляции, регрессия. Корреляционное отношение.

1. Что называется статистической зависимостью?
2. Что называется корреляционной зависимостью?
3. Что называется выборочным уравнением линейной регрессии случайной величины?
4. Что называется выборочным коэффициентом регрессии?
5. Какую таблицу называют корреляционной?
6. Что называют выборочным коэффициентом корреляции?
7. В чем состоит основная задача корреляционного анализа?

Критерии и шкала оценивания по оценочному средству собеседование (устный/письменный опрос)

Шкала оценивания	Критерий оценивания
отлично (5)	Ответ полный и правильный на основании изученного материала. Выдвинутые положения аргументированы и иллюстрированы примерами. Материал изложен в определенной логической последовательности, с использованием научных терминов; ответ самостоятельный. Обучающийся уверенно отвечает на дополнительные вопросы.
хорошо (4)	Ответ полный и правильный, подтвержден примерами; но их обоснование не аргументировано. Материал изложен в определенной логической последовательности, при этом допущены 2-3 несущественные погрешности, исправленные по требованию экзаменатора. Материал изложен осознанно, самостоятельно, с использованием научных терминов. Обучающийся испытывает незначительные трудности в ответах на дополнительные вопросы.
удовлетворительно (3)	Ответ недостаточно логически выстроен, самостоятелен. Основные понятия употреблены правильно, но обнаруживается недостаточное раскрытие теоретического материала. Выдвигаемые положения недостаточно аргументированы и не подтверждены примерами; ответ носит преимущественно описательный характер. Научная терминология используется недостаточно. Обучающийся испытывает достаточные трудности в ответах на вопросы.
неудовлетворительно (2)	Ответ недостаточно логически выстроен, самостоятелен. Основные понятия употреблены неправильно, обнаруживается недостаточное раскрытие теоретического материала. Выдвигаемые положения недостаточно аргументированы и не подтверждены примерами; Научная терминология используется недостаточно. Обучающийся испытывает достаточные трудности в ответах на вопросы.

Практические работы (первый семестр)

Тема 1: Операции над матрицами.

1. Найти значение многочлена

$$f(A) = A^3 - 7 \cdot A^2 + 13 \cdot A - 5 \cdot E, \text{ где } A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Транспонировать матрицы:

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. Вычислить произведения матриц:

$$\begin{aligned} \text{а) } & \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}; & \text{б) } & \begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & 5 \end{pmatrix}; \\ \text{в) } & \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 70 & 34 & -107 \\ 52 & 26 & -68 \\ 101 & 50 & -140 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -18 & 10 \\ 31 & -17 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

4. Найти матрицу $A = (2B - 3C) \cdot D$, если

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & -5 & 0 & 6 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 4 & 5 \\ 2 & -3 & 4 & 5 \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

5. Матрицы A и B называются перестановочными, если $AB = BA$. Найти все матрицы, переставные с матрицами:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}; \quad \text{в) } \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Тема 2: Определители второго, третьего и n -го порядка и их вычисление.

1. Вычислить определитель второго порядка

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -4 \end{vmatrix}; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} \alpha & 3\alpha \\ \beta & 3\beta \end{vmatrix}.$$

2. Решить уравнение

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 2x & + & 3 & & 4 \\ & - & x & & -3 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{б) } \begin{vmatrix} x & - & 2 & & y & + & 3 \\ 1 & - & y & & x & - & 2 \end{vmatrix} = -4.$$

3. Вычислить определители разложением по какой-нибудь строке или столбцу:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix};$

б) $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & y & z \\ x & 0 & z \end{vmatrix}.$

4. Вычислить определители четвертого порядка:

а) $\begin{vmatrix} 6 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \end{vmatrix}$

б) $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$

Тема 3: Ранг матрицы. Обратная матрица.

1. Найти ранг матрицы методом элементарных преобразований:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix};$ б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & 1 & 6 & 11 \\ 1 & -1 & -1 & 4 & -3 \end{pmatrix};$ в) $\begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{pmatrix}.$

2. Найти ранг матриц методом обводных миноров

а) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix};$

б) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$

3. Исследовать зависимости от значения ранг матриц:

а) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix};$

б) $\begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}.$

4. Найти обратную матрицу к заданной матрице:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$ б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix};$ в) $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$

Тема 4: Матричные уравнения.

7. Решить матричные уравнения:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix};$

б) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix};$

в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix};$

г) $X \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{pmatrix}.$

Тема 5: Теорема Кронекера - Капелли. Метод Гаусса.

1. Исследовать системы линейных алгебраических уравнений, для совместных систем найти общее и одно частное решение:

а) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3, \\ x_1 - x_2 = -1. \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3, \\ 2x_1 + 2x_2 = 0. \end{cases}$

в) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 6. \end{cases}$

г) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 6. \end{cases}$

2. Решить системы линейных алгебраических уравнений методом Гаусса:

$$a) \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 12, \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 + x_4 = 0, \\ 5x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 = 4, \\ 7x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 16. \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 18, \\ -x_1 - x_2 + 2x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 1. \end{cases}$$

Тема 6: Решение систем линейных уравнений по формулам Крамера и матричным методом.

Решить системы линейных алгебраических уравнений методом Крамера и методом обратной матрицы:

$$1) \begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 4. \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = -7, \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 13. \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 = -11, \\ 5x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -3. \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 5, \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 9, \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 1. \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} x_1 + 5x_2 + x_3 = -8, \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 16, \\ 5x_1 + 2x_2 - x_3 = -6. \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -5, \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -8, \\ 3x_1 + 4x_2 - 4x_3 = 5. \end{cases}$$

Тема 7: Решение однородных и неоднородных систем линейных алгебраических уравнений.

1. Найти общее решение и фундаментальную систему решений для однородной системы линейных алгебраических уравнений:

$$a) \begin{cases} x_1 + x_2 = 0, \\ x_1 - x_2 = 0. \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} x_1 + x_2 = 0, \\ -x_1 - x_2 = 0. \end{cases}$$

2. Исследовать системы линейных алгебраических уравнений, для совместных систем найти общее и одно частное решение:

$$a) \begin{cases} x_1 + x_2 = 3, \\ x_1 - x_2 = -1. \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} x_1 + x_2 = 3, \\ 2x_1 + 2x_2 = 0. \end{cases}$$

$$в) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 6. \end{cases}$$

$$г) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 6. \end{cases}$$

3. Найти фундаментальные системы решений однородных систем:

$$a) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0, \\ 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0, \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 0. \end{cases} \quad б)$$

Тема 8: Линейные операции над векторами. Разложение векторов.

1. Даны начало $A(-1; 2; 3)$ и конец $B(2; 6; -2)$ вектора $\overline{AB}$. Найти координаты вектора $\overline{AB}$ и его длину.

2. Даны векторы $a(2, 3, -1)$ и $b(1, -1, 2)$. Найти координаты и длину вектора $c = 2a - 3b$.

3. Написать разложение вектора $\vec{x} \{-2, 4, 7\}$ по векторам $\vec{p}\{0; 1; 2\}$, $\vec{q}\{1; 0; 1\}$, $\vec{r}\{-1; 2; 4\}$.

4. Коллинеарны ли векторы $\vec{c}_1 = 2\vec{a} + 4\vec{b}$ и $\vec{c}_2 = 3\vec{b} - \vec{a}$, разложенные по векторам $\vec{a}\{1; -2; 3\}$ и $\vec{b}\{3; 0; -1\}$?

5. На оси абсцисс найти точку, равноудаленную от точек $A(2; 3)$ и $B(5; 6)$.

6. Даны точки $A(2; 4)$, $B(6; -2)$ и $C(-5; 0)$. Найти координаты точки D , делящей

отрезок BC в отношении $\frac{|AB|}{|AC|}$, где $|AB|$ - расстояние между точками A и B , а $|AC|$ - расстояние между точками A и C .

Тема 9: Скалярное произведение векторов.

1. Найти внутренние углы треугольника с вершинами $A(1; 7; 2)$, $B(5; -3; 3)$, $C(12; -1; -5)$.
2. Найти $(5a + 3b) \cdot (2a - b)$, если $|a| = 2$, $|b| = 3$, $a \perp b$.
3. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 7\vec{k}$ и $\vec{b} = 2\vec{i} - 5\vec{j} + 2\vec{k}$.
4. Даны векторы $\vec{a} = m\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$ и $\vec{b} = 4\vec{i} + m\vec{j} - 7\vec{k}$. При каком значении m эти векторы перпендикулярны?
5. Даны вершины $A(0; 1; 2)$, $B(3; -1; 1)$ и $C(5; 0; 3)$ треугольника. Найти угол при вершине A .
6. Вычислить, какую работу совершает сила $F\{2; -1; -4\}$, когда точка ее приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из положения $M(1; -1; 3)$ в положение $N(5; -6; 1)$.
7. Сила $\vec{F}\{4; -3; -7\}$ приложена к точке $A(1; 6; 5)$. Найти момент этой силы относительно начала координат.

Тема 10: Векторное произведение векторов.

1. Найти векторное произведение векторов $a = 2i + 3j + 5k$ и $b = i + 2j + k$.
2. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $a = 6i + 3j - 2k$ и $b = 3i - 2j + 6k$.
3. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $a + 3b$ и $3a + b$, если $|a| = |b| = 1$, $\angle a, b = 30^\circ$.
4. Вычислить площадь треугольника с вершинами: $A(1; 1; 3)$, $B(3; -1; 6)$, $C(5; 1; -3)$.
5. По заданным координатам $A(3; -1; 2)$; $B(1; 2; -1)$; $C(-1; 1; 3)$ вершин треугольника определить длины сторон, углы и площадь.

Тема 11: Смешанное произведение векторов.

1. Найти смешанное произведение векторов $a = 2i - j - k$, $\vec{b} = i + 3j - k$, $\vec{c} = i + j + 4k$.
2. Показать, что векторы $a = 2i + 5j + 7k$, $\vec{b} = i + j - k$, $\vec{c} = i + 2j + 2k$ компланарны.
3. Найти объем треугольной пирамиды с вершинами $A(2; 2; 2)$, $B(4; 3; 3)$, $C(4; 5; 4)$ и $D(5; 5; 6)$.
4. Вычислить объем тетраэдра с вершинами $A_1(2; 3; 1)$, $A_2(4; 1; -2)$, $A_3(6; 3; 7)$ и $A_4(-5; -4; 8)$, и его высоту, опущенную из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$.
5. Даны координаты вершин пирамиды: $A(2; 2; 2)$, $B(4; 3; 3)$, $C(4; 5; 4)$, $D(5; 5; 6)$. Вычислить: 1) объем пирамиды; 2) длину ребра AB ; 3) площадь грани ABC .

Тема 12: Системы координат на плоскости. Уравнение прямой на плоскости. Прямая на плоскости.

1. Найти прямоугольные координаты точки, полярные координаты которой

$$A\left(-3, \frac{5\pi}{4}\right).$$

2. Найти уравнение геометрического места точек, расстояние каждой из которых от прямой $x=3$ равно расстоянию от точки $(4;-2)$.

3. Найти точку пересечения прямых $3x - 2y + 10 = 0$ и $x + y + 5 = 0$.

4. Составить уравнение прямой, проходящей через т. $M_0(4;-2)$ перпендикулярно вектору $\vec{N}(-3;5)$.

5. Найти угол между прямыми, заданными уравнениями $5x + 3y + 15 = 0$, $x + 4y - 7 = 0$.

6. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(4;-5)$ параллельно (перпендикулярно) прямой $3x + 4y + 12 = 0$.

7. Дан треугольник с вершинами $A(2;-1)$, $B(6;-4)$, $C(10;3)$. Найти длину высоты, опущенной из точки C .

8. Даны уравнения двух сторон параллелограмма $x + 2y + 2 = 0$ и $x + y - 4 = 0$ и уравнение одной из диагоналей $x - 2 = 0$. Найти координаты вершин параллелограмма.

Тема 13: Кривые второго порядка: окружность, эллипс.

1. Уравнение окружности $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ привести к каноническому виду.

2. Найти уравнение окружности, центр которой находится в точке $(3;-5)$ и радиус которой равен 4.

3. Найти уравнение окружности, диаметром которой является отрезок прямой $3x - 4y + 12 = 0$, содержащийся между осями координат.

4. Уравнение эллипса $2x^2 + 4x + 9y^2 + 18y = 0$, привести к каноническому виду.

5. Найти длины осей, эксцентриситет и координаты фокусов эллипса $9x^2 + 25y^2 = 225$.

5. Найти уравнение эллипса, фокусы которого имеют координаты $(\pm 4; 0)$, а длина большой оси равна 10.

7. Найти уравнение эллипса, если известно, что он проходит через точки $M_1(6;4)$ и $M_2(-8;3)$.

8. Составить уравнение линии, для каждой точки которой отношение расстояний до точки $A(3; 0)$ и до прямой $x = 12$ равно числу $\varepsilon = 0,5$. Полученное уравнение привести к простейшему виду и построить кривую.

Тема 14: Кривые второго порядка: гипербола, парабола.

1. Найти эксцентриситет, координаты фокусов и уравнения асимптот гиперболы $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{25} = 1$.

2. Найти уравнение гиперболы, у которой фокусы имеют координаты $(\pm 4; 0)$ и действительная ось равна 6.

3. Найти уравнение равносторонней гиперболы, проходящей через точку $(3; -1)$.

4. Найти координаты вершины и фокуса и уравнения оси директрисы параболы $y^2 + 5y - 6x + 7 = 0$.

5. Найти уравнение параболы, вершина которой находится в точке $(3; 2)$ и фокус в точке $(5; 2)$.

6. Составить уравнения линии, для каждой точки которой ее расстояние до

точки $A(3; -4)$ равно расстоянию до прямой $y = 2$. Полученное уравнение привести к простейшему виду и построить кривую.

Тема: Общее уравнение линий второго порядка.

Привести уравнение кривой второго порядка к каноническому виду и построить:

- 1) $9x^2 + 4y^2 - 18x + 8y - 23 = 0$.
- 2) $16y^2 - 9x^2 + 32y + 54x - 209 = 0$.
- 3) $y^2 + 2x - 2y - 7 = 0$.
- 4) $3x^2 - 6x + y + 1 = 0$.
- 5) $x^2 - 2y^2 + 4y = 0$.
- 6) $x^2 - 4y^2 - 16y = 0$.

Тема 16: Плоскость и прямая в пространстве. Взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве.

1. Составить уравнение прямой, которая проходит через точки $A(3; -4)$ и $B(4; 5)$.

2. Составить уравнение прямой, которая проходит через точку $A(3; -4)$ параллельно прямой $2x + 5y - 7 = 0$, и перпендикулярно ей.

3. Уравнение плоскости $2x + 3y - 4z + 24 = 0$ преобразовать в формулу отрезков на осях.

4. Определить расстояние от точки $M(1; 2)$ до прямой $20x - 21y - 58 = 0$.

5. Найти расстояние от точки $A(2, 3, -1)$ до плоскости $7x - 6y - 6z + 42 = 0$.

6. Найти острый угол между плоскостями: $5x - 3y + 4z - 4 = 0$ и $3x - 4y - 2z + 5 = 0$.

7. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $M(-2; 3; 4)$ и перпендикулярной прямой $\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{2}$ и $\frac{x}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{3}$

Тема 17: Поверхности второго порядка.

1. Составить уравнение поверхности, образованной вращением эллипса $x^2/a^2 + z^2/c^2 = 1, z = 0$ вокруг оси Ox .

2. Составить уравнение поверхности, образованной вращением гиперболы $x^2/a^2 - z^2/c^2 = 1, y = 0$ вокруг оси Oz .

3. Установить, что плоскость $x - 2 = 0$ пересекает эллипсоид $x^2/16 + y^2/12 + z^2/4 = 1$ по эллипсу; найти его полуоси и вершины.

4. Определить вид и составить каноническое уравнение поверхности, заданной относительно прямоугольной системы координат общим уравнением $x^2 + 5y^2 + z^2 + 2xy + 6xz + 2yz - 2x + 6y + 2z = 0$.

5. Составить уравнения прямолинейных образующих однополостного гиперболоида $x^2/4 + x^2/9 - z^2/16 = 1$, параллельных плоскости $6x + 4y + 3z - 17 = 0$.

6. Составить уравнение конуса с вершиной в начале координат, направляющая которого дана уравнениями $x^2 - 2z + 1 = 0, y - z + 1 = 0$.

7. Составить уравнение цилиндра, направляющая которого дана уравнениями $x^2 - y^2 = z, x + y + z = 0$, а образующие перпендикулярны к плоскости направляющей.

Практические работы (второй семестр)

Тема 18: Способы задания функций. Основные элементарные функции, их свойства и графики.

1. Построить графики функций с помощью элементарных преобразований:

а) $y = x^2 - 10x + 21$; б) $y = 3\cos 2x$.

2. Исследовать на четность функции:

а) $y = \sin 4x - 3x$; б) $y = xe^{2x}$; в) $y = x^6 + 2x^2 - 8$.

3. Записать в явном виде неявно заданные функции:

а) $x^2 + y^2 = 1$; б) $xy = a$;
в) $2^{xy} = 5$; г) $\ln x + \ln(y+1) = 4$;

4. Найти область определения функций:

а) $y = \sqrt{5 - 2x}$; б) $y = \frac{1}{x^2 - 1}$;

в) $y = \frac{2x}{x^2 - 3x + 2}$; г) $y = \arcsin \frac{x}{4}$;

5. Определить период функции:

а) $y = \sin 3x$; б) $y = 5\cos 2x$;

6. Определить промежутки знакопостоянства функций:

1) $y = x^2 - 5x + 6$; 2) $y = 2^{x-1}$; 3) $y = |x - 1| - 2$.

Тема 19: Предел переменной величины. Свойства пределов.

1. Доказать, используя определение предела, что:

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$; 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$; 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n^3 + 1} = 0$.

2. Найти пределы последовательностей:

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - 100n^2 + 1}{100n^2 + 15n}$; 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^4 - (n-1)^4}{(n+1)^4 + (n-1)^4}$;

3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)^4 - (n-1)^4}{(2n+1)^4 + (n-1)^4}$; 4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^3 + 2n - 1}}{n + 2}$;

5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2 + n}}{n + 1}$; 6) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$;

7) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)! - n!}$; 8) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)! + (n+1)!}{(n+3)!}$.

Тема 20: Предел функции. Основные теоремы о пределах.

Найти пределы:

1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 + 2x + 1}{5x^2 + x - 1}$; 2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 + x})$;

3) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 3x - 2}{x^2 + x - 6}$; 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\sqrt{1-x} - 1}$;

5) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 + 2x + 1}{x^2 + 5}$; 5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 2} - \sqrt{x^2 + 3x + 1})$;

7) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x - 8}{2x^2 - 3x - 2}$; 8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 - \sqrt{9 - x^2}}{2x^2}$;

9) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^3 + 4x + 1}{3x^2 - 5}$; 10) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2 + 2x + 1})$;

$$11) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1};$$

$$12) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2+x^2} - \sqrt{2+x}}{x};$$

Тема 21: Замечательные пределы.

Найти пределы:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos 4x}{x \sin x};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x+2}{2-x} \right)^{\frac{1}{x}}.$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{(\sin x + \sin 3x)^2};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{2x+1} \right)^{x+3}.$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x}{\cos 2x - \cos 4x};$$

$$6) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+1}{3x+4} \right)^{x+2}.$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin 2x}{1 - \cos 6x};$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+3x}{1-x} \right)^{\frac{1}{2x}}.$$

$$9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + \sin 2x}{\sin 3x - \sin x};$$

$$10) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x+2}{5x-1} \right)^{3x+4}.$$

$$11) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 5x}{\sin 4x^2};$$

$$12) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5+x}{4+x} \right)^{3x+1}.$$

Тема 22: Вычисление производных основных элементарных функций. Правила дифференцирования функций. Производная сложной функции. Уравнения касательной и нормали.

1. Вычислить производные:

$$1) y = \sqrt{2x^2 + 4} \cdot \sin 3x;$$

$$2) y = (\ln(4x-1) + 2x^2)^2;$$

$$3) y = \frac{7x^2 + \cos^2 x}{\operatorname{tg} 5x};$$

$$4) y = e^{x \arcsin x};$$

$$5) y = \cos^3 4x + \cos 4x^3;$$

$$6) y = \sqrt{\frac{5x^3 + 4x^2 - 3}{\arccos 5x}};$$

$$7) y = \frac{e^{\sin x}}{4x^2 - 1};$$

$$8) y = (\ln \operatorname{tg} x - 3x)^3.$$

2. Составить уравнения нормали к линии $f(x) = x^3$ в точке $M_0(2;8)$.

3. Составить уравнения касательной к линии $y = \frac{8}{4+x^2}$ в точке $x=2$.

4. Вычислить производные функций, используя логарифмическое дифференцирование:

$$1) y = \sqrt[3]{(x+1)^2}.$$

$$2) y = x^3 e^{x^2} \sin 2x;$$

$$3) y = \frac{(x-2)^2 \sqrt[3]{x+1}}{(x-5)^3};$$

$$4) y = \frac{(x+1)^3 \sqrt[4]{x-2}}{\sqrt[5]{(x-3)^2}}.$$

Тема 23: Дифференцирование неявно и параметрически заданных функций. Производные высших порядков.

1. Вычислить производные функций, заданных неявно:

$$1) 2y \ln y = x;$$

$$2) \frac{1}{x^2} + y^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}};$$

$$3) x^3 + y^3 - 3axy = 0;$$

$$4) y^2 \cos x = a^2 \sin 3x;$$

$$5) y = \cos(x+y).$$

$$6) 2^x + 2^y = 2^{x+y}.$$

2. Вычислить производные функций, заданных параметрически:

$$\begin{array}{lll}
1) \begin{cases} y = t - t^3; \\ x = 1 - t^2. \end{cases} & 2) \begin{cases} y = e^t \cos t; \\ x = e^t \sin t. \end{cases} & 3) \begin{cases} y = t - \arctg t; \\ x = \ln(1 + t^2). \end{cases} \\
4) \begin{cases} y = \frac{t-1}{t}; \\ x = \frac{t+1}{t}. \end{cases} & 5) \begin{cases} y = \frac{t}{t^2-1}; \\ x = \frac{1+t^2}{t^2-1}. \end{cases} & 6) \begin{cases} y = \frac{3at^2}{1+t^3}; \\ x = \frac{3at}{1+t^3}. \end{cases}
\end{array}$$

3. Вычислить производные второго порядка заданных функций:

$$1) y = \arctg(e^{-x^2}); \quad 2) x + y + 1 = \ln(1 + x - y); \quad 3) \begin{cases} y = \cos t; \\ x = \sin(1 + t^2). \end{cases}$$

Тема 24: Дифференциал функции. Приближенные вычисления с помощью дифференциала. Дифференциалы высших порядков.

1. Найти дифференциалы функций:

$$\begin{array}{ll}
1) y = (x^2 + 4x + 1)(x^2 - \sqrt{x}); & 2) y = \frac{x^3 + 1}{x^3 - 1}; \\
3) y = 3^{-\frac{1}{x^2}} + 3x^3 - 4\sqrt{x}; & 4) y = (1 + x - x^2)^3; \\
5) y = 2^{-\frac{1}{\cos x}}; & 6) y = \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{4}\right).
\end{array}$$

2. Вычислить приблизительно значение:

$$\begin{array}{lll}
1) \arctg 1,02; & 2) \lg 12; & 3) \cos 63^\circ \\
4) \arcsin 0,4836; & 5) \sqrt[3]{68}; & 6) \sqrt[5]{240}
\end{array}$$

3. Вычислить приблизительно значение функции: $f(x) = \sqrt[3]{1 + 7x^2}$ при $x = 1,1$.

4. Найти дифференциалы второго порядка функций:

$$\begin{array}{ll}
1) y = \frac{\cos x}{1 - x^2}; & 2) y = \sqrt{\arcsin x} + (\arctg x)^2. \\
3) y = 5^{\ln \operatorname{tg} x}; & 4) y = \operatorname{tg}^2 x
\end{array}$$

Тема 25: Применение производных к исследованию поведения функций.

1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$:

$$\begin{array}{lll}
1) y = x - 2 \sin x, & [0, \pi]; & 2) y = x - 3 \ln x, \quad [2, 4]; \\
3) y = x + \frac{2}{\sqrt{x}}, & \left[\frac{1}{4}, 4\right]; & 4) y = \sqrt{169 - x^2}, \quad [-12, 5]; \\
5) y = \frac{\ln x}{x}, & [2, 4]; & 6) y = \frac{1}{x} + 4x^2, \quad \left[\frac{1}{2}, 2\right]; \\
7) y = \frac{x^3 - 2}{x}, & \left[-2, -\frac{1}{2}\right]; & 8) y = \ln \cos x, \quad \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]; \\
9) y = x^2 e^{-x}, & [1, 3]; & 10) y = x^2 - \ln x, \quad [1, 3].
\end{array}$$

Тема 26: Исследование функций и построение графиков.

31–40. Исследовать функцию $y = f(x)$ и построить ее график.

$$\begin{array}{ll}
1) y = \frac{x}{x^2 - 4}; & 2) y = \frac{x^2 + 2x + 4}{x + 2}; \\
3) y = \frac{3x^4 + 1}{x^3}; & 4) y = \frac{1 - 5x^4}{2x^5}; \\
5) y = \frac{x^4 + 1}{x^2}; & 6) y = \frac{4x^3 + 1}{x^4}; \\
7) y = \frac{x^3}{3 - x^2}; & 8) y = \frac{3x + 2}{x^3};
\end{array}$$

$$9) y = \frac{8+4x^3}{x};$$

$$10) y = \frac{x^4}{x^3 - 1}.$$

Тема 27: Первообразная. Неопределенный интеграл и его свойства. Простейшие методы интегрирования. Метод подстановки.

1. Найти интегралы, используя преобразование

$$\int f(ax+b)dx = \frac{a}{a} \int f(ax+b)dx = \frac{1}{a} \int f(ax+b)d(ax+b):$$

- 1) $\int (x+8)^{10} dx;$
- 2) $\int \cos \frac{x+3}{3} dx;$
- 3) $\int e^{\frac{x}{2}} dx;$
- 4) $\int 2^{5x+4} dx;$
- 5) $\int \frac{dx}{3-2x};$
- 6) $\int \frac{dx}{(5x+2)^2}.$

2. Найти интегралы, используя простейшие методы интегрирования:

- 1) $\int \frac{x + \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx;$
- 2) $\int \frac{x + \ln(x-2)}{x-2} dx;$
- 3) $\int \frac{\sin^2 x + \cos x}{\sin x} dx;$
- 4) $\int \frac{\sqrt{x^2-1} + \operatorname{tg} \sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}} dx.$

3. Найти интегралы, выделив полные квадраты в квадратных трехчленах:

- 1) $\int \frac{dx}{x^2+2x+5};$
- 2) $\int \frac{dx}{x^2+2x};$
- 3) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x-3-x^2}}.$
- 4) $\int \frac{8x-11}{\sqrt{5+2x-x^2}} dx.$

4. Методом подстановки найти интегралы:

- 1) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}};$
- 2) $\int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx;$
- 3) $\int \frac{dx}{e^x+1};$
- 4) $\int \frac{\ln x dx}{x(1-\ln^2 x)};$
- 5) $\int x(2x+5)^{10} dx;$
- 6) $\int \frac{\sin^3 x dx}{\sqrt{\cos x}}.$

Тема 28: Интегрирование по частям.

1. Интегрируя по частям найти интегралы:

- 1) $\int x \cdot 2^{-\frac{x}{3}} dx;$
- 2) $\int x e^{-\frac{x}{2}} dx;$
- 3) $\int \operatorname{arccotg} x dx;$
- 4) $\int (x+1) \cos 3x dx;$
- 5) $\int (2-x) e^x dx;$
- 6) $\int x \ln(1-x) dx;$
- 7) $\int \frac{x dx}{\sin^2 x};$
- 8) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1+x^2}};$
- 9) $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx.$

2. Используя комбинацию методов, найти интегралы:

- 1) $\int e^{-x^2} x^5 dx;$
- 2) $\int \sin \sqrt[3]{x} dx;$
- 3) $\int \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt[4]{x^3+1}}.$

Тема 29: Интегрирование рациональных дробей.

Найти интегралы от рациональных функций:

- 1) $\int \frac{2x^2 + 41x - 91}{(x-1)(x+3)(x-4)} dx;$
- 2) $\int \frac{dx}{6x^3 - 7x^2 - 3x};$
- 3) $\int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} dx;$
- 4) $\int \frac{x^3 - 1}{4x^3 - x} dx;$
- 5) $\int \frac{x dx}{x^4 - 3x^2 + 2};$
- 6) $\int \frac{x^4 dx}{(x+2)(x^2 - 1)};$
- 7) $\int \frac{2x^2 - 5}{x^4 - 5x^2 + 6} dx;$
- 8) $\int \frac{x^3 - 3x + 2}{x(x^2 + 2x + 1)} dx;$
- 9) $\int \left(\frac{x+2}{x-1} \right)^2 \frac{dx}{x};$
- 10) $\int \frac{x^3 + 1}{x(x-1)^3} dx;$
- 11) $\int \frac{x^2 dx}{(x+2)^2(x+1)};$
- 12) $\int \frac{(x^2 + 1) dx}{(x-1)^3}.$

Тема 30: Интегрирование тригонометрических дифференциалов, универсальная тригонометрическая подстановка. Интегрирование некоторых иррациональных выражений.

1. Найти интегралы от тригонометрических функций:

- 1) $\int \sin^2 x \cos^3 x dx;$
- 2) $\int \sin^3 x \cos^3 x dx;$
- 3) $\int \sin^5 x dx;$
- 4) $\int (1 - \sin 2x)^2 dx;$
- 5) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} dx;$
- 6) $\int \sin 5x \sin 6x dx;$
- 7) $\int \frac{dx}{3 + 5 \cos x};$
- 8) $\int \frac{dx}{\cos x + 2 \sin x + 3};$
- 9) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{\sin^3 x \cos^5 x}}.$

2. С помощью тригонометрических подстановок найти интегралы:

- 1) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}};$
- 2) $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^4} dx;$
- 3) $\int x^2 \sqrt{4-x^2} dx.$

3. Избавляясь от иррациональности подстановкой типа $\frac{ax+b}{cx+d} = t^s$, найти интегралы:

- 1) $\int \frac{x+1}{x\sqrt{x-2}} dx;$
- 2) $\int \frac{\sqrt{x}}{x+2} dx;$
- 3) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}}.$

4. Найти интегралы от дифференциальных биномов:

- 1) $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx;$
- 2) $\int x^{5/3} \sqrt[3]{1+x^3} dx;$
- 3) $\int \frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2} dx.$

Тема 31: Формула Ньютона-Лейбница. Вычисление определенных интегралов. Приближенное вычисление определенных интегралов.

1. Используя метод подстановки, вычислить интегралы:

- 1) $\int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}};$
- 2) $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{x dx}{\sqrt{4-x^2}};$
- 3) $\int_0^1 \frac{dx}{e^x + e^{-x}};$
- 4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx;$
- 5) $\int_0^3 \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}};$
- 6) $\int_2^5 \frac{x^2 dx}{\sqrt{x-1}}.$

2. Интегрируя по частям

$$1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin 2x dx; \quad 2) \int_1^{e-1} \ln(x+1) dx;$$

$$3) \int_1^e x^2 \ln x dx; \quad 4) \int_0^1 x^3 e^{2x} dx$$

2. Используя различные методы интегрирования, вычислить интегралы:

$$1) \int_1^e \frac{2 \ln x + 1}{x} dx \quad 2) \int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}} dx}{\sqrt{x}}.$$

3. Вычислить $\int_0^{\frac{1}{4}} e^{-x^2} dx$ с точностью до 10^{-4} .

Тема 32: Несобственные интегралы с бесконечными пределами (1-го рода) и от неограниченных функций (2-го рода), их основные свойства.

1. Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

$$1) \int_e^{\infty} \frac{dx}{x \ln^3 x}; \quad 2) \int_{-\infty}^1 \frac{dx}{(1+x^2) \arctg^2 x};$$

$$3) \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 8}; \quad 4) \int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{(3x+1)^2};$$

$$5) \int_e^{+\infty} \frac{dx}{x \sqrt{\ln x}}; \quad 6) \int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx.$$

2. Вычислить интегралы и установить их сходимость:

$$1) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}; \quad 2) \int_2^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^3-1}};$$

$$3) \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x} dx}{x}; \quad 4) \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx;$$

$$5) \int_2^{+\infty} \frac{x dx}{\sqrt{x^4+1}}; \quad 6) \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx.$$

Тема 33: Приложения определенного интеграла к задачам геометрии, механики, физики.

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками функций:

$$y = (x-2)^3, y = 4x-8.$$

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнением в полярной системе координат: $r = 4 \sin 3\varphi, r = 2 (r \geq 2)$.

3. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением в прямоугольной системе координат: $y = \ln(x^2 - 1), 2 \leq x \leq 3$

4. Вычислить длину дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = 3(2 \cos t - \cos 2t), \\ y = 3(2 \sin t - \sin 2t), \\ 0 \leq t \leq 2\pi. \end{cases}$$

5. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $z = x^2 + 4y^2, z = 2$.

6. Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной графиком функции: $y = -x^2 + 5x - 6, y = 0$.

7. Цилиндр высотой $H = 0,4 \text{ м}$ и радиусом $R = 0,1 \text{ м}$ наполнен газом под атмосферным давлением $103,3 \text{ кПа}$. Считая газ идеальным, определить работу (в джоулях) при изометрическом сжатии газа поршнем, переместившимся внутри цилиндра на $h = 0,35 \text{ м}$.

8. Вычислить силу, с которой вода давит на плотину, сечение которой имеет форму равнобокой трапеции со сторонами основания $a=4,5\text{м}$, $b=6,6\text{м}$ и высотой $h=3,0\text{м}$. Плотность воды, $\rho=1000\text{кг/м}^3$, ускорение свободного падения положить равным $g=10\text{м/с}^2$.

Тема 34: Функции нескольких переменных. Область определения. Геометрическое изображение функции двух переменных. Предел, непрерывность функции нескольких переменных.

Найти область значения следующих функций:

- 1) $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$; 2) $z = \ln(x^2 + y)$;
- 3) $z = \sqrt{x^2 - 4} + \sqrt{y^2 - 4}$; 4) $z = \arccos x + \arcsin y$.

Найти пределы функций:

- 1) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 2}} \frac{\sin(xy)}{x}$; 2) $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{x+y}{x^2+y^2}$; 3) $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$;
- 4) $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow 2}} \left(1 + \frac{y}{x}\right)^x$; 5) $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{x+y}{x^2-xy+y^2}$; 6) $\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} (x^2+y^2)e^{-(x+y)}$.

Найти точки разрыва функций:

- 1) $z = \frac{1}{(x-y)^2}$; 2) $z = \frac{1}{x^2+y^2-1}$; 3) $z = \sin \frac{1}{xy}$;
- 4) $z = \ln \sqrt{x^2+y^2}$; 5) $z = \frac{1}{1-e^{xy}}$; 6) $z = \frac{x}{x^4-y^4}$.

Тема 35: Частные производные функции нескольких переменных, их геометрический смысл. Полный дифференциал. Применение дифференциала в приближенных вычислениях. Дифференцирование функций, заданных неявно. Дифференцирование сложной функции.

1. Найти вторые частные производные указанных функций. Убедиться в том, что $z''_{xy} = z''_{yx}$.

- 1) $z = x^2 + y^3 - 2axy$; 2) $z = x^2y^3 - \sqrt{x+y}$;
- 3) $z = \frac{x+y}{x+y+1}$; 4) $z = (x+y)\sqrt{x-y}$;
- 5) $z = \arcsin\left(\frac{y}{x}\right)$; 6) $z = \ln(x^2 - y^2)$.

2. Вычислить частные производные функций:

- 1) $z = \ln \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ в точке $(1; 1)$;
- 2) $z = x^2y^3 + \sqrt{x^2y}$ в точке $(-1; 1)$.

3. Найти полные дифференциалы указанных функций:

- 1) $z = 2x^3y - 4xy^5$; 2) $z = x^2y \sin x - 3y$; 3) $z = \cos(x^2 - y^2) + x^3$;
- 4) $z = \operatorname{arctg} x + \sqrt{y}$; 5) $z = 5xy^4 + 2x^2y^7$; 6) $z = \ln(3x^2 - 2y^2)$.

4. Найти приближенно:

- 1) $0,97^{1,05}$; 2) $\sqrt{5e^{0,02} + (2,03)^2}$; 3) $\sin 29^\circ \cdot \operatorname{tg} 46^\circ$; 4) $\ln(\sqrt[3]{1,03} + \sqrt[4]{0,98} - 1)$.

Найти дифференциал второго порядка указанных функций:

- 1) $z = xy^2 - x^2y$; 2) $z = \ln(x - y)$; 5) $z = e^{xy}$;

3) $z = \frac{1}{2(x^2 + y^2)}$;

4) $z = x \sin^2 y$;

6) $z = x \ln \frac{y}{x}$.

Тема 36: Экстремумы функции двух переменных, необходимые и достаточные условия существования экстремума. Условный экстремум. Наименьшее и наибольшее значения функции в замкнутой области.

1. Найти экстремум функций:

1) $z = x^2 + (y - 1)^2$;

2) $z = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$;

3) $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$;

4) $z = e^{x-y}(x^2 - 2y^2)$;

5) $z = xy \ln(x^2 + y^2)$;

6) $z = \sin x + \cos y + \cos(x - y) \left([x; y] \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \right)$.

2. Найти условный экстремум функций:

1) $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ при $x + y = 2$;

2) $z = x + y$ при $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{2}$;

3) $z = xy$ при $x + y = 1$;

4) $z = x^2 + 12xy + 2y^2$ при $4x^2 + y^2 = 25$.

3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции в области D , ограниченной заданными линиями.

1) $z = 3x + y - xy$, $D: y = x, y = 4, x = 4, x = 0$;

2) $z = xy - x - 2y$, $D: x = 3, y = x, y = 0$;

3) $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$, $D: x = 0, x = 1, y = 0, y = 2$;

4) $z = 5x^2 - 3xy + y^2$, $D: x = 0, x = 1, y = 0, y = 1$;

5) $z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x$, $D: x - y + 1 = 0, x = 3, y = 0$;

6) $z = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 8$, $D: x = 0, y = 0, x + y - 1 = 0$.

Тема 37: Дифференциальные уравнения первого порядка.

1. Найти общее решение линейных дифференциальных уравнений первого порядка:

1) $y' + 2y = 4x$;

2) $y' - \operatorname{ctg} x \cdot y = \sin x$;

3) $xy' - 2y = 2x^4$;

4) $(x^2 + 1)y' + 4xy = 3$;

5) $y' - y = e^x$;

6) $xy' - y = x$.

2. Найти частное решение дифференциальных уравнений, удовлетворяющих начальным условиям:

1) $xy' = 1 + y^2, y = 0$ при $x = 1$; 2) $y' = 2x + 2xy, y = 0$ при $x = 1$;

3) $y' = \frac{y}{\sqrt{x^2 + 1}}, y = 1$ при $x = 0$; 4) $(1 + x^2)y' = 2xy, y = 2$ при $x = 0$;

5) $y' \operatorname{tg} x = y, y = 1$ при $x = \frac{\pi}{2}$; 6) $y' = 2\sqrt{y} \ln x, y = 1$ при $x = e$.

3. Решить задачу Коши:

1) $2y'\sqrt{x} = y, y(4) = 1$;

2) $y' = (2y + 1)\operatorname{ctg} x, y(\pi/4) = 1/2$.

Тема 38: Дифференциальные уравнения первого порядка: с разделяющимися переменными, однородные, линейные, Бернулли, уравнения в полных

дифференциалах.

1. Найти общее решение или общий интеграл дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными:

- 1) $xydx + (x+1)dy = 0$; 2) $(y^2 + 1)dx - xydy = 0$;
3) $(x+1)dy - (y-2)dx = 0$; 4) $(1+y^2)dx - (1+x^2)dy = 0$;
5) $\sqrt{1-y^2}dx - \sqrt{1-x^2}dy = 0$; 6) $(1+y)dx + (1+x)dy = 0$;

2. Найти общее решение дифференциальных уравнений первого порядка:

- 1) $y' = \frac{x+y}{x}$; 2) $y' = \frac{2y}{x}$; 3) $y' = \frac{y^2}{x^2} - \frac{y}{x}$;
4) $y' = \frac{2yx+y^2}{x^2}$; 5) $y' = \frac{y}{x} + \operatorname{tg} \frac{y}{x}$; 6) $y' = \frac{y}{x} + \sin^2\left(\frac{y}{x}\right)$.

3. Найти общее решение уравнений Бернулли:

- 1) $x^2y^2 \cdot y' + xy^3 = 1$; 2) $y' + \frac{1}{x}y = -xy^2$;
3) $xy' - y^2 \cdot \ln x + y = 0$; 4) $y' - \frac{1}{2}y - y^2 = 0$;

4. Найти общее решение дифференциальных уравнений в полных дифференциалах:

- 1) $(x+y)dx + (x+2y)dy = 0$; 2) $(x^2 + y^2 + 2x)dx + 2xydy = 0$;
3) $(x^3 - 3xy^2 + 2)dx + (y^2 - 3x^2y)dy$; 4) $(xdx + ydy)(x^2 + y^2) = xdy - ydx$;
5) $2xydx + (y^2 - 3x^2)dy = 0$; 6) $(4x^2 - y^2)dx + 2xydy = 0$.

5. Решить задачу Коши:

- 1) $y' + y \cos x = e^{-\sin x}$, $y(0) = -1$; 2) $3y^2y' + y^3 = x+1$, $y(1) = -1$.

Тема 39: Дифференциальные уравнения высших порядков, понятия решения общего и частного. Уравнения, допускающие понижение порядка.

1. Найти общее решение дифференциальных уравнений второго порядка:

- 1) $y'' \cdot \operatorname{tg} x = y' + 1$; 2) $2y \cdot y'' - (y')^2 = 0$;
3) $x(y'' + 1) + y' = 0$; 4) $xy'' - y' = x^2e^x$.

2. Найти общее решение дифференциального уравнения, допускающего понижение порядка.

- 1) $(1 - x^2) \cdot y'' - xy' = 2$; 2) $y'' \cdot x \ln x = y'$;
3) $y'' \operatorname{tg} x = y' + 1$; 3); 4)
 $y''(1+y) = 5(y')^2$.

3. Найти частное решение дифференциальных уравнений, удовлетворяющих начальным условиям:

- 1) $y'' = \cos x$; при $x=0$, $y=0$, $y'=0$;
2) $y''' = 6x$; при $x=0$, $y=1$, $y'=0$, $y''=0$;
3) $y'' = 4e^{2x}$; $y=1$, $y'=2$ при $x=0$;
4) $y'' - y + 2y^3 = 0$; $y=1$, $y=0$ при $x=0$.

4. Решить задачу Коши:

- 1) $y'' = xe^x$, $y(0) = y'(0) = 0$; 2) $y'' = y' \ln y'$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Тема 40: Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка.

1. Исследовать на линейную зависимость группы функций:

- 1) $\ln x$; x ; 2) $\sin x$; $\cos x$;
 3) $x^2 + 3x$; $x^2 - 1$; $x + 3$; 4) $\ln x^4$; $\ln 5x$; 11.

2. Найти общее решение дифференциальных уравнений:

- 1) $y'' = x^2$. 2) $y'' = \sin x$
 3) $xy'' + y' = (y')^2$ 4) $y'' = (y')^2$

Решить линейные однородные дифференциальные уравнения, если известно одно из частных решений:

- 1) $y'' + \frac{y'}{x} - \frac{y}{x^2} = 0$; $y_1(x) = \frac{1}{x}$;
 2) $(y'' + (2 \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x)y' + 2y \operatorname{tg}^2 x = 0$; $y_1(x) = \cos^2 x$;
 3) $x^2(1 - \ln x)y'' + xy' - y = 0$; $y_1(x) = x$;
 4) $y'' - \frac{2y}{x^2} = 0$; $y_1(x) = \frac{1}{x}$;
 5) $(x^2 - 2x)y'' - (x^2 - 2)y' + 2(x - 1)y = 0$; $y_1(x) = x^2$;
 6) $xy'' + 2y' + x = 0$; $y_1(x) = \frac{\sin x}{x}$.

Тема 41: Решение линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

1. Найти общее решение уравнений:

- 1) $y'' - y = 0$; 2) $y'' - 4y' + 3y = 0$;
 3) $y'' - y' - 2y = 0$; 4) $y'' - 4y = 0$;
 5) $y'' + 8y' + 16y = 0$; 6) $y'' + y' - y = 0$.

2. Найти частное решение дифференциальных уравнений, удовлетворяющих начальным условиям:

- 1) $y'' + y = 0$; $y' = 1$, $y = 0$ при $x = 0$;
 2) $y'' - 2y' + y = 0$; $y' = 1$, $y = 0$ при $x = 0$.

3. Найти общее решение дифференциальных уравнений:

- 1) $y''' + 9y' = 0$; 2) $y^{(IV)} - 13y'' + 36y = 0$;
 3) $y^{(IV)} = 8y'' - 16y$; 4) $y''' - 13y' - 12y = 0$.

Тема 42: Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

1. Найти общее решение уравнений:

- 1) $y'' + 4y = 8x^2$; 2) $y'' - y = 2x - x^2$;
 3) $y'' + 2y' + 2y = 2x^2 + 4x + 2$; 4) $y'' + y' = e^x(2x + 3)$;
 5) $y'' + 2y = 2 \cos x$; 6) $y'' - y = 2 \cos x + 2 \sin x$.

2. Найти частное решение линейных дифференциальных уравнений:

- 1) $y'' + y = x^3 + x + 3$; 2) $y'' + y' + y = 2x - 1$;
 3) $y'' - y = 2 - x^2 - 2x$; 4) $y'' + y' = 3x^2 - 6$;
 5) $y'' - 2y' = -2x + 2$; 6) $y'' = x^2$.

3. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям:

- 1) $y'' + 2y' - 3y = e^{2x}$; $y(0) = 1$; $y'(0) = 1$.
 2) $y'' + 4y' - 12y = 8 \sin 2x$; $y(0) = -1$; $y'(0) = 1$.

3. Найти общее решение дифференциального уравнения методом вариации произвольных постоянных:

$$1) y'' + y = ctg^2 x$$

$$2) y'' - 6y' + 9y = \frac{e^{3x}}{x}$$

Тема 43: Системы дифференциальных уравнений. Методы решения.

1. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений:

$$1) \begin{cases} x' = -7x + y \\ y' = -2x - 5y \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x' = x - y \\ y' = x + y \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = 3x + 4y \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} x' = x - y \\ y' = -4x + y \end{cases}$$

2. Найти решение системы дифференциальных уравнений, удовлетворяющее заданным начальным.

$$1) \begin{cases} x' = x - y \\ y' = -4x + 4y \end{cases}; \\ x(0) = 2, \quad y(0) = 1.$$

$$2) \begin{cases} x' = -2x + y \\ y' = -3x + 2y \end{cases}; \\ x(0) = 1, \quad y(0) = 3.$$

$$3) \begin{cases} x' = 3x + y \\ y' = x + 3y \end{cases}; \\ x(0) = 2, \quad y(0) = 3.$$

$$4) \begin{cases} x' = 7x + 3y \\ y' = x + 5y \end{cases}; \\ x(0) = 1, \quad y(0) = 2.$$

Практические работы (третий семестр)

Тема 44. Двойной интеграл. Свойства двойного интеграла. Вычисление двойного интеграла в декартовых координатах.

1. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле и сделать чертеж области интегрирования $\int_{-1}^0 dx \int_{-8x^2}^{-2x+6} f(x, y) dy$

2. Вычислить двойной интеграл $\int_D f y^2 dx dy$ по области $D: y = x^2, y = 2x$.

3. Вычислить двойной интеграл $\int_D f dx dy$, если область D ограничена линиями $x=0, y=-x, y=2-x^2$.

Тема 45. Вычисление двойного интеграла в полярных координатах.

1. Вычислить $\int_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$, где область D ограничена окружностью $x^2 + y^2 = 9$ и осью Ox ($y \geq 0$).

2. Вычислить интеграл, перейдя от прямоугольных декартовых координат к полярным: а) $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}} dy$; б) $\int_{-2}^2 dx \int_{-\sqrt{4-x}}^{\sqrt{4-x^2}} \sin \sqrt{x^2 + y^2} dy$

Тема 46. Замена переменных в двойном интеграле. Приложения двойного интеграла.

1. В двойном интеграле $\int_D f(x, y) dx dy$ расставить пределы интегрирования двумя способами, если область D ограничена линиями:

а) $y = x^2, x + y = 2, x \geq 0$; б) $y = x^2, y = x + 2, x = 0$ ($x \geq 0$).

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной прямой $y = 2x + 1$ и параболой $y = x^2 + 1$.

3. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 - 1, y = 0, x = 0$ ($x \geq 0$).

4. Найти массу плоской пластинки D с поверхностной плотностью $\rho(x, y) = 2y$, ограниченной линиями $y = \sqrt{x}, x = 0, y = 2$.

5. Вычислить объем тела V , ограниченного поверхностями $z = 4 - x^2, x + y = 2, x = 0, y = 0, z = 0$.

Тема 47. Вычисление тройного интеграла в декартовых координатах. Замена переменных в тройном интеграле.

1. Вычислить тройной интеграл $\int_V \frac{dx dy dz}{(1+x+y+z)^3}$ по пространственной области V , ограниченной поверхностями $\begin{cases} x+z=3 \\ x=0, y=0, z=0 \end{cases}$.

2. Вычислить объем тела, ограниченного заданными поверхностями: $z = 4 - (x^2 + y^2), 2x + 3y = 1; x \geq 0; y \geq 0; z \geq 0$.

3. Вычислить интеграл $\int_V f(x^2 + z^2) dx dy dz$, если область V ограничена поверхностями $z = x + y, x + y = 1, x = 0, y = 0, z = 0$.

4. Вычислить интеграл $\iiint_V \frac{xdxdydz}{(x+y+z)^3}$, если область V ограничена плоскостью $x+y+z=1$ и координатными плоскостями.

Тема 48. Тройной интеграл в цилиндрических и сферических координатах. Приложения тройного интеграла.

1. Вычислить интеграл $\iiint_V (x^2 + y^2) dx dy dz$, если область V определяется неравенствами $z \geq 0$, $r^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$.
2. Вычислить объем тела, ограниченного заданными поверхностями: $z = x^2 + y^2$ и $z = 8 - x^2 - y^2$.
3. Найти момент инерции однородного бруса длиной l , a и b – размеры прямоугольного поперечного сечения.
4. Найти центр тяжести однородного тела, ограниченного параболоидом $z = \frac{1}{9}x^2 + \frac{1}{9}y^2$ и плоскостью $z = 1$.

Тема 49. Вычисление криволинейного интеграла первого рода.

1. Вычислим работу силы $\vec{F} = yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}$ вдоль отрезка прямой AB , если $A(1, 1, 1)$ и $B(2, 3, 4)$.
2. Вычислить $\int_{(AB)} f(x, y) dl$, где (AB) – график функции $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, а $f(x, y) = x \cdot y$.
3. Вычислить криволинейный интеграл 1-го рода $\int_{(AB)}^2 xyz dl$, где путь интегрирования (AB) – это первые два витка винтовой линии $x = R \cos t$, $y = R \sin t$, $z = Vt$.
4. Найти массу участка параболы $y = 0,5x^2$ от точки $A(0,0)$ до точки $B(4,8)$, если линейная плотность задана функцией $\mu(x, y) = k \frac{y}{x}$.
5. Найти координаты центра масс однородной дуги астроида $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.
6. Дуга, равная четверти окружности радиуса R , притягивает массу m , помещённую в центре окружности. Линейная плотность в каждой точке дуги пропорциональна расстоянию от точки до хорды, стягивающей дугу.
7. Найти площадь части цилиндрической поверхности $(\sigma): x^2 + y^2 = R^2$, заключенной между двумя плоскостями $(\sigma_1): y + z = R$ и $(\sigma_2): 2y + z = R$.

Тема 50. Вычисление криволинейного интеграла второго рода. Независимость криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования.

1. Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{a}(M) = (x - 2z)\vec{i} + (x + 3y + z)\vec{j} + (5x + y)\vec{k}$ по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости $(p): x + y + z = 1$ с координатными плоскостями при положительном направлении обхода относительно нормального вектора $\vec{n} = \{1; 1; 1\}$ этой плоскости двумя способами: 1) используя определение циркуляции; 2) с помощью формулы Стокса.

2. Вычислить криволинейный интеграл $I = \int_{(OA)} (x - y^2) dx + 3xy dy$, где $O(0,0)$, $A(2,4)$ для случаев:

а) (OA) – дуга параболы $y = x^2$;

б) (OA) – двухзвенная ломанная $(OB) \cup (BA)$, $B(2,0)$.

3. Вычислить $\int_L xy dx + (x^2 + y) dy$, если L : 1) дуга параболы $y = \frac{x^2}{2} + 1$, расположенная между точками $A(0, 1)$ и $B(2, 3)$; 2) отрезок прямой AB .

4. Вычислить работу силового поля $\vec{F} = y^2 \vec{i} + 2x \vec{j}$ при перемещении материальной точки вдоль контура окружности $x^2 + y^2 = 4$, пробегаемой против часовой стрелки.

Вычислить $\oint_{(L)} x dy - y dx$, где (L) – петля линии $x = t^2 + 1$, $y = t(4 - t^2)$.

5. Проверить независимость от пути для интеграла $I = \int_{(AB)} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{3y^2}{x^4} \right) dx - \frac{2y}{x^3} dy$ и вычислить его, если $A(1, 0)$, $B(2, 3)$.

Тема 51. Формула Грина. Приложения криволинейных интегралов.

1. Вычислить $\oint_L (2xy - y) dx + x^2 dy$, где L – контур треугольника ABC с вершинами в точках $A(-1, 0)$, $B(0, 2)$, $C(0, 1)$.

2. Найти $I = \oint_L (-x^2 y + 2x - 1) dx + (xy^2 - y + 3) dy$, где $L: x^2 + y^2 = R^2$.

3. Вычислить с помощью формулы Грина криволинейный интеграл $\oint_L x^2 y dx - xy^2 dy$ по окружности L с центром в начале координат радиуса R , при положительном направлении обхода.

Тема 52. Поверхностные интегралы первого рода.

1. Вычислить поверхностный интеграл первого рода $\int_S f(y, z) ds$ по пространственной области $S = \{(x, y, z) | \begin{matrix} x + y + z = 1, \\ x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \end{matrix}\}$.

2. Дан цилиндр (R, H) с однородной боковой поверхностью. С какой силой эта поверхность притягивает массу m , находящуюся в центре основания?

3. Найти положение центра масс однородной полусферы радиуса R .

Тема 53. Поверхностные интегралы второго рода. Приложения поверхностных интегралов.

1. Вычислить поверхностный интеграл второго рода $\int_S f dy dz + y dz dx + z dx dy$, где S – внешняя сторона сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

2. Вычислить поверхностный интеграл II рода $\int_S (y - z) dy dz + (z - x) dz dx + (x - y) dx dy$, где S – нижняя сторона части конической поверхности $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, при $z \in [0, h]$.

3. Вычислить поверхностный интеграл II рода $\int_S f^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy$, где S – внешняя сторона сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ при $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$.

4. С помощью формулы Остроградского-Гаусса вычислить поверхностный интеграл II рода $\oint_S f^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy$ по внешней стороне S сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Тема 54. Комплексные числа в алгебраической, тригонометрической и показательной формах. Действия над комплексными числами.

1. Для комплексного числа $z = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ найти модуль и аргумент, записать его в тригонометрическом и экспоненциальном виде. Определить все корни 5-ой степени из этого комплексного числа.

2. Следующие комплексные числа представить в тригонометрической и показательной формах и изобразить точками и векторами на комплексной плоскости: а) $z_1 = 2 - \sqrt{12}i$, б) $z_2 = -4$.

3. Даны комплексные числа: $z_1 = 5 + i$, $z_2 = -2 + 3i$, $z_3 = 2 - i$. Вычислить:

1) $z_1 z_2 + z_3^3$; 2) $z_3^2 + \frac{z_1}{z_2}$; 3) $z_1^2 - \bar{z}_2 z_3$.

4. Ток меняется по закону $i = 10 \sin(\omega t + 120^\circ)$ А. Найти комплексную амплитуду тока и изобразить ее на комплексной плоскости.

5. Задано комплексное действующее значение тока $\dot{I} = 10 - 10j$ А. Записать выражение для его мгновенного значения.

Тема 55. Числовые ряды. Сходимость и сумма ряда. Необходимое условие сходимости. Знакопостоянные ряды. Признаки сравнения. Признаки Даламбера, корневой Коши, интегральный Коши.

1. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^n$.

2. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + n} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{11} + \dots + \frac{1}{2^n + n} + \dots$.

3. Исследовать сходимость ряда, используя признаки сходимости:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3 + 1}}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}}$ в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{(n+1) \cdot (n^2 - n + 1)}$.

4. Исследовать сходимость ряда, применяя признак Д'Аламбера:

а) $2 + \frac{2^2}{2^4} + \frac{2^3}{3^4} + \frac{2^4}{4^4} + \dots + \frac{2^n}{n^4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^4}$; б) $3 + \frac{3^2}{2!} + \frac{3^3}{3!} + \frac{3^4}{4!} + \dots + \frac{3^n}{n!} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$.

5. Исследовать сходимость ряда, применяя признак Коши:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5n}{2n+3} \right)^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, $p \in \mathbb{R}$.

Тема 56. Знакопередающие ряды. Признак Лейбница. Абсолютная и условная сходимость. Функциональные ряды. Область сходимости, методы ее определения.

1. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$.

2. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)3^n}$

3. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд:

а) $-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{\cos \pi n}{n} + \dots$; б) $\frac{\sin \alpha}{1} + \frac{\sin 2\alpha}{4} + \frac{\sin 3\alpha}{9} + \dots + \frac{\sin n\alpha}{n^2} + \dots$

Тема 57. Степенные ряды. Интервал и область сходимости степенных рядов.

1. Найти радиус сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$.

2. Найти область сходимости степенного ряда:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^n \sqrt{n}}; & \text{б) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}; & \text{в) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 x^n}{2^n}; \\ \text{г) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{2^n}; & \text{д) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n} x^n}{n!}; & \text{е) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{3n-2}. \end{array}$$

Тема 58. Ряд Тейлора и Маклорена. Разложение функций в степенные ряды. Применения степенных рядов в приближенных вычислениях.

1. Функцию $f(x) = e^{-2x^2}$ разложить в ряд Маклорена.

2. Вычислить $\ln 1,2$ с точностью $\delta = 0,001$.

3. Вычислить $\sqrt[3]{68}$ с точностью до 0,01.

4. Разложить в ряд по степеням x функцию $f(x) = x^3 \sin \frac{x^2}{4}$.

5. Вычислить приближенно $\sin 18^\circ$, ограничиваясь первыми двумя членами ряда Маклорена для функции $\sin x$, и оценить получившуюся при этом погрешность.

Тема 59. Ряды Фурье для четных, нечетных функций, для функций с периодом $2l$. Применение тригонометрическим рядов Фурье в приближенных вычислениях.

1. Разложить периодическую с периодом $T = 2\pi$ функцию $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } -\pi \leq x < 0, \\ 1 & \text{при } 0 \leq x < \pi, \end{cases}$ в ряд Фурье. Построить графики функции $f(x)$ и суммы ряда $S(x)$.

2. Разложить в ряд Фурье периодическую с периодом $T = 4$ функцию $f(x) = x$, $-2 \leq x \leq 2$.

3. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию $f(x) = x^3$ с периодом $T = 2\pi$ на отрезке $[-\pi; \pi]$.

4. Разложить данную функцию в ряд Фурье:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & ; -2 \leq x \leq 0 \\ x & ; 0 < x < 2 \end{cases} \text{ в интервале } (-2, 2).$$

Тема 60. Разложение непериодических функций в ряд Фурье. Понятия о преобразовании и интеграле Фурье.

1. Разложить функцию $f(x) = x^2$ в ряд Фурье в интервале $(0, 1)$ в ряд синусов.

2. Разложить данную функцию в ряд Фурье:

$$f(x) = \begin{cases} x & ; 0 \leq x \leq \pi/2 \\ \pi - x & ; \pi/2 \leq x \leq \pi \end{cases} \text{ по синусам на интервале } [0, \pi].$$

3. Разложить функцию $f(x) = x^2$ в ряд Фурье в интервале $(0, 1)$ в ряд синусов.

Практические работы (четвертый семестр)

Тема 61: Случайные события. Алгебра событий Частота события.

1. Устройство состоит из пяти элементов, из которых два изношены. При включении устройства включаются случайным образом два элемента. Найти вероятность того, что включенными окажутся неизношенные элементы.

2. В «секретном» замке на общей оси четыре диска, каждый из которых разделен на пять секторов, на которых написаны различные цифры. Замок открывается только в том случае, если диски установлены так, что цифры на них составляют определенное четырехзначное число. Найти вероятность того, что при произвольной установке дисков замок будет открыт.

3. При испытании партии приборов относительная частота годных приборов оказалась равной 0,9. Найти число годных приборов, если всего было проверено 200 приборов.

4. В коробке находится 10 шаров. 3 из них красные, 2 – зеленые, остальные белые. Найти вероятность того, что вынутый наугад шар будет красным, зеленым или белым.

5. В лотерее из 1000 билетов имеются 200 выигрышных. Вынимают наугад один билет. Чему равна вероятность того, что этот билет выигрышный?

6. В партии из 18 деталей находятся 4 бракованных. Наугад выбирают 5 деталей. Найти вероятность того, что из этих 5 деталей две окажутся бракованными.

7. На факультете изучается 16 предметов. На понедельник нужно в расписание поставить 3 предмета. Сколькими способами можно это сделать?

8. Из 15 объектов нужно отобрать 10 объектов. Сколькими способами это можно сделать?

9. Сколькими способами можно составить дозор из трех солдат и одного офицера, если имеется 80 солдат и 3 офицера?

10. В читальном зале имеется 6 учебников по теории вероятностей, из которых 3 в переплете. Библиотекарь наудачу взял 2 учебника. Найти вероятность того, что оба учебника окажутся в переплете.

Тема 62: Классическое, статистическое определения вероятности. Геометрическая вероятность. Аксиомы вероятности.

1. В сигнализатор поступают сигналы от двух устройств, причем поступление каждого из сигналов равновозможно в любой момент промежутка времени длительностью T . Моменты поступления сигналов независимы один от другого. Сигнализатор срабатывает, если разность между моментами поступления сигналов меньше t ($t < T$). Найти вероятность того, что сигнализатор срабатывает за время T , если каждое из устройств пошлет по одному сигналу.

2. Два студента условились встретиться в определенном месте между 12 и 13 часами дня. Пришедший первым, ждет второго в течение $\frac{1}{4}$ часа, после чего уходит. Найти вероятность того, что встреча состоится, если каждый студент наудачу выбирает момент своего прихода (в промежутке от 12 до 13 часов).

3. Брошены две игральные кости. Рассмотрим следующие события:

$A = \{\text{на обеих костях выпали равные очки}\};$

$B = \{\text{на первой кости выпали очки: 1, 2 или 3}\};$

$C = \{\text{на первой кости выпали очки: 4, 5 или 6}\}.$

Определить являются ли совместными и зависимыми попарно события A и B , B и C .

4. В электрическую цепь последовательно включены три элемента, работающие независимо один от другого. Вероятности отказов первого, второго и третьего элементов соответственно равны: $p_1 = 0,1$; $p_2 = 0,15$; $p_3 = 0,2$. Найти вероятность того, что тока в цепи не будет.

5. В фирме 600 работников, 420 из них имеют высшее образование, а 340 - среднее специальное образование, 286 сотрудников имеют и высшее и среднее специальное образование. Чему равна вероятность того, что случайно выбранный работник имеет или среднее специальное, или высшее образование, или и то и другое?

6. Финансовый аналитик предполагает, что, если норма (ставка) процента упадет за определенный период, то вероятность того, что рынок акций будет расти в это же время, равна 0,60. Аналитик также считает, что норма процента может упасть за этот же период с вероятностью 0,50. Используя полученную информацию, определите вероятность того, что в течение обсуждаемого периода рынок акций будет расти, а норма процента падать?

7. Для компании, занимающейся строительством терминалов для аэропортов, вероятность получить контракт в стране A , равна 0,8, вероятность выиграть его в стране B , равна 0,3. Вероятность того, что контракты будут заключены и в стране A , и в стране B , равна 0,24. Чему равна вероятность того, что компания получит контракт хотя бы в одной стране?

8. Готовясь к зачету, студент выучил 20 из 30 вопросов программы. а) Какова вероятность того, что студент сдаст зачет, если для этого необходимо ответить на 2 случайно выбранных вопроса? Какова вероятность, что он не сдаст зачет?

Тема 63: Теоремы сложения и умножения вероятностей. Условные вероятности. Формула полной вероятности. Формулы Байеса.

1. Из полной колоды карт (52 шт.) одновременно вынимают четыре карты. Найти вероятность того, что среди этих четырех карт будет хотя бы одна бубновая или одна червонная карта.

2. В барабане револьвера находятся 4 патрона из шести в произвольном порядке. Барабан раскручивают, после чего нажимают на спусковой крючок два раза. Найти вероятности хотя бы одного выстрела, двух выстрелов, двух осечек.

3. Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,7, а для второго – 0,8. Найти вероятность того, что при одном залпе в мишень попадает только один из стрелков.

4. Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,7, а для второго – 0,8. Найти вероятность того, что при одном залпе в мишень попадает только один из стрелков.

5. Вероятность того, что взятая наугад деталь из некоторой партии деталей, будет бракованной равна 0,2. Найти вероятность того, что из трех взятых деталей 2 окажется не бракованными.

6. Вероятности того, что нужная деталь находится в первом, втором, третьем или четвертом ящике, соответственно равны 0,6, 0,7, 0,8, 0,9. Найти вероятности

того, что эта деталь находится: а) не более, чем в трех ящиках; б) не менее, чем в двух ящиках.

7. Вероятность того, что клиент банка не вернет заем в период экономического роста, равна 0,04, а в период экономического кризиса – 0,13. Предположим, что вероятность того, что начнется период экономического роста, равна 0,65. Чему равна вероятность того, что случайно выбранный клиент банка не вернет полученный кредит?

8. Два автомата производят одинаковые детали, которые поступают на общий конвейер. Производительность первого автомата вдвое больше производительности второго. Первый автомат производит в среднем 60% деталей отличного качества, а второй – 84%. Наудачу взятая с конвейера деталь оказалась отличного качества. Найти вероятность того, что эта деталь произведена первым автоматом.

Тема 64: Последовательность независимых испытаний Бернулли. Формула Бернулли. Предельные теоремы в схеме Бернулли.

1. Вероятность того, что расход электроэнергии в продолжение одних суток не превысит установленной нормы, равна $p = 0,75$. Найти вероятность того, что в ближайшие 6 суток расход электроэнергии в течение 4 суток не превысит нормы.

2. Два равносильных шахматиста играют в шахматы. Что вероятнее выиграть: две партии из четырех или три партии из шести (ничьи во внимание не принимаются)?

3. Найти вероятность того, что событие A наступит ровно 70 раз в 243 испытаниях, если вероятность появления этого события в каждом испытании равна 0,25.

4. Вероятность появления события в каждом из 100 независимых испытаний постоянна и равна $p = 0,8$. Найти вероятность того, что событие появится:

- а) не менее 75 раз и не более 90 раз;
- б) не менее 75 раз;
- с) не более 74 раз.

5. По цели производится 5 выстрелов. Вероятность попадания для каждого выстрела равна 0,4. Найти вероятность того, что в цель попали не менее трех раз.

6. Вероятность появления положительного результата в каждом из n опытов равна 0,9. Сколько нужно произвести опытов, чтобы с вероятностью 0,98 можно было ожидать, что не менее 150 опытов дадут положительный результат.

7. Найти вероятность того, что событие A наступит ровно 70 раз в 243 испытаниях, если вероятность появления этого события в каждом испытании равна 0,25.

8. Вероятность рождения мальчика равна 0,51. Найти вероятность того, что среди 100 новорожденных окажется 50 мальчиков.

Тема 65: Случайные величины. Формы закона распределения дискретной случайной величины и непрерывной случайной величины. Основные числовые характеристики случайных величин: мода, медиана, математическое ожидание, дисперсия, их свойства. Начальные и центральные моменты высших порядков.

1. Случайная величина X подчинена закону распределения с плотностью $f(x)$, причем

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ a = (3x - x^2) & \text{при } 0 \leq x \leq 3, \\ 0 & \text{при } x > 3. \end{cases}$$

Требуется:

- 1) Найти коэффициент a ;
- 2) построить график распределения плотности $y = f(x)$;
- 3) найти вероятность попадания X в промежуток $(1; 2)$.

2. Даны вероятности значений случайной величины X : значение 10 имеет вероятность 0,3; значение 2 – вероятность 0,4; значение 8 – вероятность 0,1; значение 4 – вероятность 0,2. Построить ряд распределения случайной величины X .

3. Устройство состоит из трех независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента в одном опыте равна 0,1. Составить закон распределения числа отказавших элементов в одном опыте.

4. После ответа студента на вопросы экзаменационного билета экзаменатор задает студенту дополнительные вопросы. Преподаватель прекращает задавать дополнительные вопросы, как только студент обнаруживает незнание заданного вопроса. Вероятность того, что студент ответит на любой заданный дополнительный вопрос, равна 0,9. Требуется:

а) составить закон распределения случайной дискретной величины X – числа дополнительных вопросов, которые преподаватель задаст студенту;

б) найти наивероятнейшее число k_0 заданных студенту дополнительных вопросов.

5. Устройство состоит из 1000 элементов, работающих независимо один от другого. Вероятность отказа любого элемента в течение времени T равна 0,002. Найти вероятность того, что за время T откажут ровно три элемента.

6. Найти математическое ожидание случайной величины X , зная закон ее распределения

X	-1	0	1	2	3
p	0,2	0,1	0,25	0,15	0,3

7. Найдём математическое ожидание случайных величин X и Y , зная законы их распределения

1)

X	-8	-4	-1	1	3	7
p	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$

2)

Y	-2	-1	0	1	2	3
p	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{4}$

8. Дискретная случайная величина распределена по закону:

X	-1	0	1	2
p	0,2	0,1	0,3	0,4

Найти $D(X)$.

Тема 66: Биномиальное распределение. Распределение Пуассона. Распределение Эрланга. Показательное распределение. Равномерное распределение.

Нормальное распределение. Закон больших чисел: неравенство и теорема Чебышева, теоремы Бернулли и Ляпунова. Центральная предельная теорема.

1. Найти математическое ожидание дискретной случайной величины X , заданной законом распределения:

а)

X	-4	6	10
P	0,2	0,3	0,5

б)

X	0,21	0,54	0,61
P	0,1	0,5	0,4

2. Найти дисперсию и среднеквадратическое отклонение дискретной случайной величины X , заданной законом распределения:

а)

X	4,3	5,1	10,6
P	0,2	0,3	0,5

б)

X	131	140	160	180
P	0,005	0,10	0,25	0,60

3. Найти дисперсию дискретной случайной величины X , распределенной по закону Пуассона:

X	0	1	...	K
P	$e^{-\lambda} \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda}/1!$	$\lambda^2 \cdot e^{-\lambda}/2!$	...	$\lambda^k \cdot e^{-\lambda}/k!$

4. В осветительную сеть параллельно включено 20 ламп. Вероятность того, что за время T лампа будет включена, равна 0,8. Пользуясь неравенством Чебышева, оценить вероятность того, что абсолютная величина разности между числом включенных ламп и средним числом (математическим ожиданием) включенных ламп за время T окажется:

а) меньше трех;

б) не меньше трех.

5. Случайная величина X задана функцией распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq -1, \\ \frac{3}{4} \cdot x + \frac{3}{4}, & \text{при } -1 < x \leq \frac{1}{3}, \\ 1, & \text{при } x > \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания величина X примет значение, заключенное в интервале $(0, 1/3)$.

6. Случайная величина X задана на всей оси Ox функцией распределения $F(x) = 1/2 + (\arctg x)/\pi$. Найти вероятность того, что в результате испытания величина X примет значение, заключенное в интервале $(0, 1)$.

7. Функция распределения непрерывной случайной величины X (времени безотказной работы некоторого устройства) равна $F(x) = 1 - e^{-x/T}$ ($x \geq 0$). Найти вероятность безотказной работы устройства за время $x \geq T$.

8. Дискретная случайная величина задана законом распределения

X	3	4	7	10
P	0,2	0,1	0,4	0,3

Найти функцию распределения и построить ее график.

Тема 67: Математическая статистика. Генеральная совокупность. Выборка. Способы отбора, обеспечивающие репрезентативность выборки. Статистический ряд. Эмпирическое распределение. Полигон. Гистограмма. Среднее значение, разброс.

1. Срок службы шестерен коробки передач зависит от следующих факторов: усталости материала в основании зуба, контактных напряжений и жесткости конструкции. Вероятность отказа каждого фактора в одном испытании не зависит от

влияния остальных факторов и равна 0,1. Составить закон распределения числа отказавших факторов в одном испытании. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X – числа отказов факторов.

2. В магазине было продано за день 40 костюмов. Имеется вариационный ряд случайной величины X - размера костюма.

x_i	46	48	50	52	54	56
n_i	2	5	9	13	8	3

Построить полигон относительных частот.

3. Стадо коров в 1000 голов обследуется на жирность молока. Для обследования случайным образом отобрано 50 коров. Объем генеральной совокупности $N=1000$. Объем выборки $n=50$.

При этом получено статистическое распределение:

x_i % жирности	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9	4	4,1	4,2	4,3
n_i	2	3	7	8	9	11	5	3	2

Составить ряд распределения относительных частот w_i . Записать статистическую функцию распределения $F^*(x)$.

Тема 68: Двумерные случайные величины. Условия независимости случайных величин. Нормальный закон распределения на плоскости. Нормальная корреляция.

1. Дискретные независимые случайные величины X и Y заданы распределениями:

X	1	3
P	0,3	0,7

Y	2	4
P	0,6	0,4

Найти распределение случайной величины $Z = X + Y$.

2. Независимые случайные величины X и Y заданы плотностями распределений: $f_1(x) = \frac{1}{3} \cdot e^{-\frac{x}{3}}$, $(0 < x < +\infty)$ и $f_2(y) = \frac{1}{5} \cdot e^{-\frac{y}{5}}$, $(0 < y < +\infty)$

3. Найти композицию этих законов, т.е. плотность распределения случайной величины $Z=X+Y$.

4. Задана плотность совместного распределения непрерывной двумерной случайной величины (X, Y) :

$$f(x, y) = \begin{cases} 4 \cdot x \cdot y \cdot e^{-x^2 - y^2}, & \text{при } x \geq 0, y \geq 0, \\ 0, & \text{при } x < 0 \text{ или } y < 0. \end{cases}$$

Найти: а) математические ожидания; б) дисперсии составляющих X и Y .

Тема 69: Элементы теории корреляции: корреляционный момент, коэффициент корреляции, регрессия. Корреляционное отношение.

1. Найти уравнение регрессии y на x и оценить тесноту корреляционной связи для случайных величин, приведенных в таблице:

$X \backslash Y$	160	165	170	175	180	185	n_y
60	5	1	-	-	-	-	6
65	-	6	2	-	-	-	8
75	-	-	5	40	5	-	50
80	-	-	2	8	7	-	17

90	-	-	-	4	7	8	19
n_x	5	7	9	52	19	8	$n=100$

2. Доказать, что если X и Y связаны линейной зависимостью $Y = a \cdot X + b$, то абсолютная величина коэффициента корреляции равна единице.

3. Дана корреляционная таблица:

Y	X					
	5	10	15	20	n_y	$\bar{x}_y$
10	2	—	—	—	2	5
20	5	4	1	—	10	8
30	3	8	6	3	20	12,25
40	—	3	6	6	15	16
50	—	—	2	1	3	16,67
n_x	10	15	15	10	$n=50$	
$\bar{y}_x$	21	29,33	36	38		

Найти а) r_B б) выборочные уравнения прямых регрессии; в) η_{yx} и η_{xy} .

Критерии и шкала оценивания по оценочному средству практическая работа

Шкала оценивания	Критерий оценивания
отлично (5)	Студент правильно выполнил задание. Показал отличные владения навыками применения полученных знаний и умений при решении профессиональных задач в рамках усвоенного учебного материала. Ответил на все дополнительные вопросы на защите.
хорошо (4)	Студент выполнил задание с небольшими неточностями. Показал хорошие владения навыками применения полученных знаний и умений при решении профессиональных задач в рамках усвоенного учебного материала. Ответил на большинство дополнительных вопросов на защите.
удовлетвори- тельно (3)	Студент выполнил задание с существенными неточностями. Показал удовлетворительное владение навыками применения полученных знаний и умений при решении профессиональных задач в рамках усвоенного учебного материала. При ответах на дополнительные вопросы на защите было допущено много неточностей.
неудовлетвори- тельно (2)	При выполнении задания студент продемонстрировал недостаточный уровень владения умениями и навыками при решении профессиональных задач в рамках усвоенного учебного материала. При ответах на дополнительные вопросы на защите было допущено множество неточностей.

Индивидуальные задания (первый семестр)

Тема 1. Матрицы и определители

Задание 1. Найти значение многочлена $f(x)=2x^3 + 3x - 2$ от матрицы $A=$

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Задание 2. Вычислить определитель 3-го порядка: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 6 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$

Задание 3. Вычислить определитель высшего порядка: $\begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}.$

Задание 4. Привести матрицу к ступенчатому виду и вычислить ранг матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & -2 & -3 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Решить матричное уравнение: $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 15 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$

Тема 2. Системы линейных уравнений

Задание 1. Проверить совместность системы уравнений и в случае совместности решить ее:

а) по формулам Крамера;

б) с помощью обратной матрицы (матричным методом);

в) методом Гаусса.

$$1) \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 7, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6. \end{cases} \quad \begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 12, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 6, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases}$$

Задание 2. Решить однородную систему линейных алгебраических уравнений:

$$1) \begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 8x_1 - x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 5x_1 - 6x_2 + 4x_3 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$

Тема 3. Векторная алгебра.

Задание 1. Найти $(5a + 3b) \cdot (2a - b)$, если $|a| = 2, |b| = 3, a \perp b$.

Задание 2. Определить угол между векторами $a = i + 2j + 3k$ и $b = 6i + 4j - 2k$.

Задание 3. Найти векторное произведение векторов $a = 2i + 3j + 5k$ и $b = i + 2j + k$.

Задание 4. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $a = 6i + 3j - 2k$ и $b = 3i - 2j + 6k$.

Задание 5. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $a + 3b$ и $3a + b$, если $a = b = 1, \angle a, b = 30^\circ$.

Задание 6. Найти смешанное произведение векторов $a = 2i - j - k, b = i + 3j - k, c = i + j + 4k$.

Задание 7. Показать, что векторы $a = 2i + 5j + 7k, b = i + j - k, c = i + 2j + 2k$

компланарны.

Задание 8. Найти внутренние углы треугольника с вершинами $A(1, 7, 2)$, $B(5, -3, 3)$, $C(12, -1, -5)$.

Задание 9. Определить, при каком значении α векторы $a = i + 2j + \alpha k$ и $b = \alpha i - 3j + 2k$ перпендикулярны.

Задание 10. Вычислить работу, произведенную силой $F = (8, 4, -6)$ при перемещении ее точки приложения с начала в конец вектора $s = (5, -3, 2)$.

Тема 4. Аналитическая геометрия.

Задание 1. Даны три последовательные вершины параллелограмма $A(5;3)$, $B(2;1)$, $C(3;-5)$. Не находя координаты вершины D , найти:

- 1) уравнение стороны AD ;
- 2) уравнение высоты BK , опущенной из вершины B на сторону AD ;
- 3) длину высоты BK ;
- 4) уравнение диагонали BD ;
- 5) тангенс угла между диагоналями параллелограмма.

Записать общие уравнения найденных прямых. Построить чертеж.

Задание 2. Даны точки $A(2;-3;-2)$, $B(-1;3;0)$, $C(-2;0;1)$, $D(4;-1;3)$. Найти:

- 1) общее уравнение плоскости ABC ;
- 2) общее уравнение плоскости, проходящей через точку D параллельно плоскости ABC ;
- 3) расстояние от точки D до плоскости ABC ;
- 4) канонические уравнения прямой AD ;
- 5) канонические уравнения прямой, проходящей через точку B параллельно прямой AD ;
- 6) синус угла между плоскостью ABC и прямой AD .

Задание 3. Уравнение кривой второго порядка $9x^2 - 4y^2 - 36x - 4y - 1 = 0$ путем выделения полного квадрата привести к каноническому виду. Построить кривую.

Задание 4. Кривая задана в полярной системе координат уравнением $\rho = \frac{1}{2}\varphi$.

Требуется:

- 1) найти точки, лежащие на кривой, давая φ значения через промежуток, равный $\frac{\pi}{8}$, начиная от $\varphi = 0$ до $\varphi = 2\pi$;
- 2) построить полученные точки;
- 3) построить кривую, соединив построенные точки (от руки или с помощью лекала);
- 4) составить уравнение этой кривой в прямоугольной декартовой системе координат.

Задание 5. Построить на плоскости геометрическое место точек, определяемое неравенствами

$$1) \begin{cases} 1 \leq x \leq 2 \\ -x \leq y \leq 0; \end{cases} \quad 2) 0 \leq x \leq \sqrt{9 - (y+1)^2}.$$

Индивидуальные задания (второй семестр)

Тема 5: Введение в математический анализ.

Задание 1. Вычислить пределы функций.

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^4}{x^2 + 2} - x^2 \right);$

б) $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{2x^2 + x - 1}{x^2 - 6x - 7};$

в) $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x-3} - 2}{x^2 - 49};$

г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos x^2}}{1 - \cos x};$

д) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos 5x) \cdot \operatorname{ctg}^2 3x;$

е) $\lim_{x \rightarrow 3} (3x - 5)^{\frac{2x}{x^2 - 4}}.$

Задание 2. Дана функция $y = f(x)$ и два значения аргумента x .

Требуется:

1) Найти значение функции при стремлении аргумента к каждому из данных значений x ;

2) Определить, является ли функция непрерывной или разрывной при данных значениях x ;

3) Сделать схематический чертеж в окрестности точек x_1 и x_2 .

$$y = \frac{x^2}{x - 2}, \quad x_1 = 2, \quad x_2 = 1.$$

Задание 3. Для кусочно-заданной функции $y = f(x)$.

Требуется:

1) Найти точки разрыва функции, если они существуют;

2) Найти скачок функции в каждой точке разрыва;

3) Сделать схематический чертеж.

$$y = \begin{cases} -x - 1, & \text{если } x < 0, \\ (x + 5)^2, & \text{если } 0 \leq x < 3, \\ 1 - x, & \text{если } x \geq 3. \end{cases}$$

Тема 6. Производная и дифференциал.

Задание 1. Найти производные

1) $y = 3x^2 + \sqrt[3]{x} - \frac{1}{x^2} + 3,$

2) $y = \sin x \cdot \operatorname{arctg} x,$

3) $y = \frac{\cos x}{x - \sqrt[3]{x}},$

4) $y = \sqrt[3]{\frac{1}{x^2 + 1}},$

5) $y = \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x + x,$

6) $y = \arccos \frac{2x - 1}{\sqrt{3}},$

7) $y = (1 + \ln \sin x)^2,$

8) $y = 2^{\frac{1}{\ln x}},$

9) $y = x \operatorname{arctg} \sqrt{x},$

10) $y = e^{\sin x}.$

Задание 2. Найти $\frac{dy}{dx}$:

1) $x^3 + \operatorname{arctg}(e^y) + y(x - 1) = 0$, 2) $\sin y = x + 3y$,

3) $\begin{cases} x = 2t - t^2, \\ y = 3t - t^3. \end{cases}$

Задание 3. Найти $\frac{d^2y}{dx^2}$:

$y = x \cos 2x$

Задание 4. Найти дифференциал функции:

$y = \ln \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{x}}$

Задание 5. Составить уравнения касательной и нормали к линии $y = x^2 - x + 1$ в точке с абсциссой $x = -1$.

Тема 7. Исследование функций.

Задание 1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке:

$y = x^2 e^{-x} + \sqrt{3}$; $[-1; 4]$

Задание 2. Исследовать функцию и построить ее график:

$y = \frac{x^2 + 4}{x}$

Тема 8. Интегральное исчисление функции одной переменной.

Задание 1: Вычислить интегралы:

1) $\int \left(\sqrt{x} - 2x^3 - \frac{1}{x^2} \right) dx$;

2) $\int (1 - \sin 2x)^5 \cos 2x dx$;

3) $\int \frac{\sin x}{1 + 2 \cos x} dx$;

4) $\int 2^{-x^3} x^2 dx$;

5) $\int (e^x + 1)^2 dx$;

6) $\int e^x \sin e^x dx$;

7) $\int (\sin^2 x + 1) x dx$;

8) $\int \frac{x + 4}{x^3 - 2x^2 + 3x} dx$;

9) $\int \sin 5x \cdot \cos 8x dx$;

10) $\int (e^x - 3)^2 dx$.

Задание 2: Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

а) $\int_0^2 \frac{x dx}{\sqrt{4 - x^2}}$;

б) $\int_2^{\infty} \frac{x dx}{\sqrt{(x^2 + 5)^3}}$.

Задание 3: Вычислить:

а) площадь фигуры, ограниченной кривой $y = \ln x$ и прямыми $x = e$, $x = e^2$ и $y = 0$;

б) площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox параболы

$$y^2 = 2x + 1 \text{ от } x_1 = 1 \text{ до } x_2 = 7;$$

в) объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$.

Тема 9. Функции нескольких переменных.

Задание 1. Найти градиент и уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $x^2 + 2y^2 - 3z^2 + 5x - 7z + 18 = 0$, в точке $M_0(1, -1, 2)$.

Задание 2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + y^2 - xy - 3x$; в области D , ограниченной заданными линиями: $y + 2x = 6$, $y = 0$, $x = 0$.

Задание 3. Найти полный дифференциал функции $z = xy \cdot e^{5x^2}$.

Задание 4. Найти частные производные второго порядка функций:

а) $z = \ln(3x^2 - 2y^2)$;

б) $z = \arcsin(x - y)$

Задание 5. Вычислить значение производной сложной функции $u = u(x, y) = \arccos \frac{x^2}{y}$, где $x = x(t) = 1 + \ln t$, $y = y(t) = -2e^{-t^2+1}$, при $t = t_0 = 1$ с точностью до двух знаков после запятой.

Тема 10. Обыкновенные дифференциальные уравнения.

Задание 1. Найти общее решение дифференциальных уравнений:

а) $xy' + y = 5$;

б) $y' - y(1 + x) = x$;

в) $y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$;

г) $x(y' - y) = e^x$.

Задание 2. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} x' = 2x + 3y \\ y' = 4y + x \end{cases}$$

Задание 3. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 8$.

Задание 4. Найти общее решение дифференциального уравнения $(y')^2 + 2yy'' = 0$.

Задание 5. Найти общее решение дифференциального уравнения методом вариации произвольных постоянных $y'' + y' = \sin^2 x$.

Индивидуальные задания (третий семестр)

Тема 11. Комплексные числа.

1. Следующие комплексные числа представить в тригонометрической и

показательной формах и изобразить точками и векторами на комплексной плоскости: а) $z_1 = 2 - \sqrt{12}i$, б) $z_2 = -4$.

2. Даны комплексные числа: $z_1 = 5 + i$, $z_2 = -2 + 3i$, $z_3 = 2 - i$.

Вычислить: 1) $z_1 z_2 + z_3^3$; 2) $z_3^2 + \frac{z_1}{z_2}$; 3) $z_1^2 - \bar{z}_2 z_3$.

3. Ток меняется по закону $i = 10 \sin(\omega t + 120^\circ)$ А. Найти комплексную амплитуду тока и изобразить ее на комплексной плоскости.

Тема 12. Кратные и криволинейные и поверхностные интегралы.

Задание 1. Представить двойной интеграл $\iint_D f(x, y) dx dy$ в виде повторного с внешним интегрированием по x и внешним интегрированием по y , если границы области интегрирования D ограничены кривыми с уравнениями: $y \geq 0$, $x = \sqrt{y}$, $y = \sqrt{8 - x^2}$.

Задание 2. Вычислить двойной интеграл $\iint_D x^2 y dx dy$ по области $D: y = x^2$, $x = y^2$.

Задание 3. Вычислить интеграл, перейдя от прямоугольных декартовых координат к полярным: $\iint_D e^{x^2 + y^2} dx dy$, $D: x^2 + y^2 \leq 1$

Задание 4. Вычислить объем тела, ограниченного заданными поверхностями $y^2 + 4z^2 = 4$; $y = 2x$; $x = 0$; $z = 0$

Задание 5. Используя формулу Грина, вычислить криволинейный интеграл $\oint_L (x^2 + y^2) dx + (x^2 - y^2) dy$ по замкнутому контуру, где L – контур треугольника с вершинами $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C(0,1)$

Задание 6. Вычислить, используя формулу Стокса или непосредственно криволинейный интеграл 2-го рода и пояснить его физический смысл:

$\oint_L y dx - x dy + z dz$, где L – линия пересечения сферы и конуса $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ x^2 + y^2 = z^2, \quad z \geq 0 \end{cases}$

Тема 13. Ряды

Задание 1. Исследовать данные ряды на сходимость:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{2n+1} \right)^{2n^2};$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} n \sin \frac{1}{n^2}; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^5 + 3n + 6}}.$$

Задание 2. Найти область сходимости ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - 4n + 5}{3^n \cdot (n+1)} \cdot (3x - 1)^n$

Задание 3. Вычислить определенный интеграл с точностью до 0,001, разложив подынтегральную функцию в ряд и затем проинтегрировав его почленно: $\int_0^1 \cos \sqrt[3]{x} dx$.

Задание 4. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданному начальному условию:

$$y' + 2y^2 = e^x, \quad y(0) = 0$$

Задание 5. Разложить функцию $f(x) = \pi - |x|$ в ряд Фурье в интервале $(-\pi, \pi)$.

Индивидуальные задания (четвертый семестр)

Тема 14. Основные теоремы теории вероятностей.

Задание 1. Из колоды в 36 карт наудачу одна за другой извлекают две карты. Найти вероятность того, что ими окажутся: а) две дамы; б) туз и дама; в) две карты трефовой масти?

Задание 2. Вероятность того, что покупатель, собирающийся приобрести компьютер и пакет прикладных программ, приобретет только компьютер, равна 0,65. Вероятность того, что покупатель купит только пакет программ, равна 0,15. Вероятность того, что будет куплен и компьютер, и пакет программ, равна 0,35. Чему равна вероятность того, что будет куплен или компьютер, или пакет программ, или компьютер и пакет программ вместе?

Задание 3. Аудиторская фирма размещает рекламу в журнале “Коммерсант”. По оценкам фирмы 55% людей, читающих журнал, являются потенциальными клиентами фирмы. Выборочный опрос читателей журнала показал также, что 70% людей, которые читают журнал, помнят о рекламе фирмы, помещенной в конце журнала. Оцените, чему равна доля людей, которые являются потенциальными клиентами фирмы и могут вспомнить ее рекламу?

Задание 4. Исследованиями маркетологов установлено, что мужчины и женщины по-разному реагируют на рекламу средств бытовой химии. Результаты исследований показали, что 64% женщин позитивно реагируют на такую рекламу, считая что она дает полезную информацию о новинках в этой сфере, в то время как 48% мужчин реагируют на подобную рекламу негативно. 12 женщин и 8 мужчин заполнили анкету, в которой оценили новую рекламу средств бытовой химии. Случайно извлеченная анкета содержит негативную реакцию. Чему равна вероятность того, что её заполняла женщина?

Задание 5. Компьютерная фирма разработала программу автоматизации учета в кафе и ресторанах. Рекламные материалы были разосланы в крупнейшие кафе и рестораны города, которые составляют 70% от общего числа предприятий питания города. Закупили программу 40% кафе и ресторанов, которые получили рекламные материалы и 15% не получавших ее. Какова вероятность того, что случайно выбранное кафе, заказало новую программу автоматизации учета?

Тема 15. Законы распределения дискретных случайных величин.

Задание 1. Нефтегазразведывательная компания получила финансирование для проведения 7 нефтегазразведок. Вероятность успешной нефтегазразведки 0,2. Предположим, что нефтегазразведки осуществляют независимые друг от друга разведывательные партии.

а) Составьте ряд распределения числа успешных нефтегазразведок и постройте его график;

б) Найдите числовые характеристики этого распределения;

в) Запишите в общем виде функцию распределения вероятностей и постройте ее график;

г) Чему равна вероятность того, что как минимум три нефтегазразведки принесут успех?

Задание 2. В салоне мобильной техники представлены 4 модели телефона Samsung, 5 моделей телефона Nokia и 6 моделей телефона Motorola. В течение дня

было продано 3 телефона.

- а) Составьте ряд распределения числа проданных телефонов Samsung и постройте его график;
- б) Найдите числовые характеристики этого распределения;
- в) Запишите в общем виде функцию распределения вероятностей и постройте ее график;
- г) Чему равна вероятность того, что в течение дня было продано как минимум два телефона Samsung?

Задание 3. Некоторый ресторан славится хорошей кухней. Управляющий ресторана утверждает, что в субботний вечер в течение получаса подходит в среднем 5 групп посетителей.

- а) Составьте ряд распределения возможного числа групп посетителей ресторана в течение получаса; постройте его график;
- б) Найдите числовые характеристики этого распределения;
- в) Запишите в общем виде функцию распределения вероятностей и постройте ее график;
- г) Чему равна вероятность того, что три или более групп посетителей придут в ресторан в течение 60-минутного промежутка времени?

Задание 4. В кредитном отделе банка работают 5 специалистов с высшим финансовым образованием и 3 специалиста с высшим юридическим образованием. Руководство банка решило направить 3 специалистов для повышения квалификации, отбирая их в случайном порядке.

- а) Составьте ряд распределения числа специалистов с высшим юридическим образованием, которые могут быть направлены на повышение квалификации и постройте его график;
- б) Найдите числовые характеристики этого распределения.
- в) Запишите в общем виде функцию распределения вероятностей и постройте ее график;
- г) Какова вероятность того, что повышать квалификацию будут не более двух специалистов с высшим юридическим образованием?

Задание 5. Для экспертной оценки качества растворимого кофе было отобрано 9 образцов разных производителей: 6 образцов фирмы Nestle и 3 образца фирмы Kraft Food. В результате проверки выяснилось, что 4 случайно выбранных образца соответствуют стандартам качества.

- а) Составьте ряд распределения числа образцов продукции фирмы Nestle, среди отобранных и постройте его график;
- б) Найдите числовые характеристики этого распределения;
- в) Запишите в общем виде функцию распределения вероятностей и постройте ее график;
- г) Чему равна вероятность того, что как минимум два образца фирмы Nestle соответствуют качеству?

Тема 16. Законы распределения непрерывных случайных величин.

Задание 1. Компьютерная система содержит 50 одинаковых микрочипов. Вероятность того, что любой микрочип будет работать в заданное время, равна 0,9. Для выполнения некоторой операции требуется, чтобы, по крайней мере, 30 микрочипов было в рабочем состоянии.

а) Чему равна вероятность того, что операция будет выполнена успешно?

б) Чему равна вероятность того, что будут работать 47 микрочипов?

Задание 2. Почтовое отделение быстро оценивает объем переводов в рублях, взвешивая почтовые отправления, полученные в течение каждого текущего рабочего дня. Установлено, что если вес почтовых отправлений составляет N кг, то объем переводов в рублях есть случайная величина, распределенная по нормальному закону со средним значением $160N$ и стандартным отклонением $20N$ руб. Найти вероятность того, что в день, когда вес почтовых отправлений составит 150 кг, объем переводов в рублях будет находиться в пределах:

а) от 21000 до 27000 руб.; б) более 28500 руб.; в) менее 22000 руб.

Задание 3. Менеджер крупного ресторана по опыту знает, что только 80% людей, сделавших заказ на вечер, придут в ресторан поужинать. В один из вечеров менеджер решил принять 60 заказов, хотя в ресторане было лишь 55 свободных столиков. Чему равна вероятность того, что более 55 посетителей придут на заказанные места?

Задание 4. Экзамен по математической статистике успешно сдают 75% студентов дневного отделения. Если на втором курсе факультета обучается 250 студентов, то какова вероятность того, что 203 студента сдадут экзамен успешно?

Задание 5. В отделе продаж страховой компании работают 45 сотрудников. Вероятность того, что сотрудник выполнит план по числу заключенных договоров, оценивается начальником отдела как 0,7. Какова вероятность того, что:

а) план выполняют как минимум 35 сотрудников?

б) план выполняют не более 30 сотрудников?

в) план выполняют 37 сотрудников?

Тема 17. Статистическая проверка гипотезы.

Задание 1. Компания, производящая средства для потери веса, утверждает, что прием таблеток в сочетании со специальной диетой позволяет сбросить в среднем в неделю 800 граммов веса. Случайным образом отобраны 25 человек, использующих эту терапию, и обнаружено, что в среднем еженедельная потеря в весе составила 830 граммов со средним квадратическим отклонением 250 граммов. Ответьте, правда ли, что потеря в весе составляет 800 граммов? Уровень значимости $\alpha = 0,05$.

Задание 2. Компания утверждает, что новый вид зубной пасты для детей лучше предохраняет зубы от кариеса, чем зубные пасты, производимые другими фирмами. Для проверки эффекта в случайном порядке была отобрана группа из 500 детей, которые пользовались новым видом зубной пасты. Другая группа из 600 детей, также случайно выбранных, в это же время пользовалась другими видами зубной пасты. После окончания эксперимента было выяснено, что у 30 детей, использующих новую пасту, и 35 детей из контрольной группы появились новые признаки кариеса. Имеются ли у компании достаточные основания для утверждения о том, что новый сорт зубной пасты эффективнее предотвращает кариес, чем другие виды зубной пасты? Принять уровень значимости $\alpha = 0,05$.

Задание 3. По оценкам оператора сотовой связи средняя длительность ежедневных звонков составляет 24 минуты на одного абонента. Выборочное обследование 100 абонентов показало, что среднечасовая длительность звонков составляет 30 минут. На уровне значимости $\alpha = 0,05$ оцените статистическую значимость различий выборочного обследования, если известно, что стандартное

отклонение длительности звонков в генеральной совокупности составляет 3 минуты.

Задание 4. По оценкам финансовых аналитиков риск потери денежных средств для инвесторов арт - бизнеса составляет 17% в течение пяти лет. Среди 400 постоянных клиентов аукционного дома был проведен опрос, в ходе которого выяснилось, что 65 из них потеряли средства на вложениях в предметы искусства за последние пять лет. Можно ли утверждать, что оценки финансовых аналитиков совпадают с действительностью на уровне значимости $\alpha = 0,01$?

Задание 5. Крупный коммерческий банк заказал маркетинговое исследование по выявлению эффекта «премирования» (калькулятор, набор ручек и др.), как стимула для открытия счета в банке. Для проверки случайным образом было отобрано 230 «премированных» посетителей и 200 «не премированных». В результате выяснилось, что 80% посетителей, которым предлагалась премия и 75% посетителей, которым не предлагалась премия, открыли счет в банке в течение 6 месяцев. Используя эти данные, проверьте гипотезу о том, что доля «премированных» посетителей, открывших счет в банке, статистически существенно отличается от удельного веса «не премированных» посетителей, открывших счет в банке. Принять уровень значимости $\alpha = 0,01$.

Критерии и шкала оценивания по оценочному средству индивидуальное задание

Шкала оценивания	Критерий оценивания
отлично (5)	Студент правильно выполнил задание. Показал отличное владения навыками применения полученных знаний и умений при решении профессиональных задач в рамках усвоенного учебного материала. Ответил на все дополнительные вопросы на защите.
хорошо (4)	Студент выполнил задание с небольшими неточностями. Показал хорошие владения навыками применения полученных знаний и умений при решении профессиональных задач в рамках усвоенного учебного материала. Ответил на большинство дополнительных вопросов на защите.
удовлетвори- тельно (3)	Студент выполнил задание с существенными неточностями. Показал удовлетворительное владение навыками применения полученных знаний и умений при решении профессиональных задач в рамках усвоенного учебного материала. При ответах на дополнительные вопросы на защите было допущено много неточностей.
неудовлетвори- тельно (2)	При выполнении задания студент продемонстрировал недостаточный уровень владения умениями и навыками при решении профессиональных задач в рамках усвоенного учебного материала. При ответах на дополнительные вопросы на защите было допущено множество неточностей.

Оценочные средства для промежуточной аттестации.

Вопросы к экзамену (первый семестр)

1. Матрица, порядок матрицы.
2. Виды матриц.
3. Транспонирование матриц.
4. Сложение и вычитание матриц.
5. Умножение матриц на число.
6. Произведение матриц.
7. Элементарные преобразования матриц.
8. Эквивалентные матрицы.
9. Определители матриц. Вычисление определителей 2-го порядка.
10. Вычисление определителей 3-го порядка.
11. Вычисление определителей 4-го и более порядка.
12. Разложение определителя по элементам некоторого ряда.
13. Свойства определителей.
14. Миноры определителей n -го порядка.
15. Алгебраические дополнения определителей n -го порядка.
16. Ранг матрицы.
17. Свойства ранга матрицы.
18. Вырожденные и невырожденные матрицы.
19. Обратная матрица.
20. Свойства обратной матрицы.
21. Необходимое и достаточное условие существования обратной матрицы.
22. Матричные уравнения. Решение матричных уравнений.
23. Системы линейных уравнений. Теорема Кронекера-Капелли.
24. Правило решения произвольной системы линейных уравнений.
25. Методы решения систем линейных алгебраических уравнений. Метод Гаусса.
26. Методы решения систем линейных алгебраических уравнений. Матричный метод.
27. Методы решения систем линейных алгебраических уравнений. Метод Крамера.
28. Системы однородных линейных уравнений. Необходимость и достаточность существования ненулевых решений системы однородных линейных уравнений.
29. Векторы.
30. Линейные операции над векторами.
31. Проекция вектора на ось.
32. Свойства проекций.
33. Разложение вектора по ортам.
34. Модуль вектора.
35. Направляющие косинусы.
36. Линейные операции над векторами.
37. Равенство векторов.
38. Коллинеарность векторов.
39. Координаты точки.

40. Координаты вектора.
41. Скалярное произведение векторов.
42. Свойства скалярного произведения.
43. Выражение скалярного произведения через координаты.
44. Угол между векторами.
45. Условие перпендикулярности векторов.
46. Проекция вектора на заданное направление. Работа постоянной силы.
47. Векторное произведение векторов и его свойства.
48. Выражение векторного произведения через координаты.
49. Векторное произведение векторов
50. Условие коллинеарности векторов.
51. Нахождение площади параллелограмма и треугольника.
52. Смешанное произведение трех векторов, его геометрический смысл и свойства.
53. Выражение смешанного произведения через координаты.
54. Определение взаимной ориентации векторов в пространстве.
55. Компланарность векторов.
56. Определение объемов параллелепипеда и треугольной пирамиды.
57. Основные понятия системы координат на плоскости.
58. Расстояние между двумя точками.
59. Деление отрезка в данном отношении и пополам.
60. Площадь треугольника.
61. Преобразование системы координат: параллельный перенос осей координат. Поворот осей координат.
62. Прямая на плоскости. Уравнение прямой с угловым коэффициентом.
63. Прямая на плоскости. Общее уравнение прямой.
64. Прямая на плоскости. Уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении.
65. Прямая на плоскости. Уравнение прямой, проходящей через две точки.
66. Прямая на плоскости. Уравнение прямой в отрезках.
67. Прямая на плоскости. Уравнение прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору.
68. Прямая на плоскости. Полярное уравнение прямой.
69. Прямая на плоскости. Нормальное уравнение прямой.
70. Прямая линия на плоскости. Угол между двумя прямыми и условия параллельности и перпендикулярности двух прямых.
71. Расстояние от точки до прямой.
72. Линии второго порядка на плоскости. Окружность.
73. Линии второго порядка на плоскости. Эллипс: определение эллипса, фокусы, вершины, оси, полуоси, эксцентриситет, директрисы эллипса, каноническое уравнение эллипса.
74. Исследование формы эллипса по его уравнению.
75. Линии второго порядка на плоскости. Гипербола: определение гиперболы, фокусы, вершины, центр, действительные и мнимые оси и полуоси, эксцентриситет, фокальные радиусы, директрисы, асимптоты гиперболы, основной прямоугольник гиперболы каноническое уравнение гиперболы.
76. Уравнение равносторонней гиперболы, асимптотами которой служат

оси координат.

77. Сопряженные гиперболы.
78. Исследование формы гиперболы по ее уравнению.
79. Линии второго порядка на плоскости. Парабола: определение параболы, фокус, директриса, параметр параболы, каноническое уравнение параболы.
80. Исследование форм параболы по ее уравнению.
81. Вершина параболы, фокальный радиус точки.
82. Уравнение кривых второго порядка с осями симметрии, параллельными координатным осям. Единое уравнение для окружности, эллипса, гиперболы и параболы.
83. Общее уравнение второго порядка.
84. Уравнение поверхности. Текущие координаты точек поверхности.
85. Уравнение сферы.
86. Уравнения линии в пространстве.
87. Уравнения плоскости в пространстве.
88. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору.
89. Уравнения плоскости в пространстве.
90. Общее уравнение плоскости.
91. Уравнения плоскости в пространстве.
92. Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки.
93. Уравнение плоскости в отрезках.
94. Нормальное уравнение плоскости.
95. Угол между двумя плоскостями.
96. Условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей.
97. Расстояние от точки до плоскости.
98. Уравнения прямой в пространстве: векторное уравнение прямой, параметрические уравнения прямой, канонические уравнения прямой, уравнение прямой в пространстве, проходящей через две точки, общие уравнения прямой.
99. Прямая линия в пространстве. Угол между прямыми.
100. Условия параллельности и перпендикулярности прямых.
101. Условие, при котором две прямые лежат в одной плоскости.
102. Прямая и плоскость в пространстве. Угол между прямой и плоскостью.
103. Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости.
104. Прямая и плоскость в пространстве. Пересечение прямой с плоскостью.
105. Условие принадлежности прямой плоскости.
106. Цилиндрические поверхности. Направляющая и образующая цилиндра.
107. Эллиптический, круговой, параболический и гиперболический цилиндры.
108. Поверхности вращения. Конические поверхности.
109. Канонические уравнения поверхностей второго порядка.
110. Эллипсоид.
111. Однополостный гиперболоид.
112. Двухполостный гиперболоид.
113. Эллиптический параболоид.
114. Гиперболический параболоид.
115. Конус второго порядка.

Задачи к экзамену (первый семестр)

1. Вычислить определитель: $\begin{vmatrix} 3 & -5 & 4 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & 3 & -8 \end{vmatrix}$

2. Решить систему методом Гаусса, матричным способом и используя правило Крамера.

$$\begin{cases} 3x + 4y + 5z = 22 \\ x - 3y - 6z = -9 \\ 2x + 4y - 4z = 10 \end{cases}$$

3. Выполнить действия:

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2 - 2 \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2$$

4. Найти уравнение множества точек, равноудаленных от оси Oy и точки $F(4,0)$

5. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(2,3)$:

а) параллельно оси Ox ;

б) параллельно оси Oy ;

в) и составляющей с осью угол 45° .

6. Составить уравнения прямых, проходящих через точки: $A(3,1)$ и $B(5,4)$.

7. Стороны AB , BC и AC треугольника ABC заданы соответственно уравнениями $4x + 3y - 5 = 0$, $x - 3y + 10 = 0$, $x - 2 = 0$. Определить координаты его вершин.

8. Составить уравнения прямых, проходящих через точку пересечения прямых $2x - 3y + 1 = 0$ и $3x - y - 2 = 0$ параллельно и перпендикулярно прямой $y = x + 1$.

9. Найти длину и уравнение высоты BD в треугольнике с вершинами $A(-3,0)$, $B(2,5)$, $C(3,2)$.

10. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $A(4,3)$ и отсекающей от координатного угла треугольник площадью 3 кв. ед.

11. Дан треугольник с вершинами $A(-2,0)$, $B(2,4)$ и $C(4,0)$. Найти уравнения сторон треугольника, медианы AE , высоты AD и длину медианы AE .

12. В треугольнике ABC даны уравнения: стороны AB $3x + 2y - 12 = 0$, высоты BM $x + 2y - 4 = 0$, высоты AM $4x + y - 6 = 0$, где M – точка пересечения высот. Найти уравнения сторон AC , BC и высоты CM .

13. Две стороны параллелограмма заданы уравнениями $y = x - 2$ и $x - 5y + 6 = 0$. Диагонали его пересекаются в начале координат. Найти уравнения двух сторон параллелограмма и его диагоналей.

14. Найти расстояние между параллельными прямыми $3x + 4y - 24 = 0$ и $3x + 4y + 6 = 0$.

15. Даны уравнения сторон треугольника $3x - 4y + 24 = 0$ (AB), $4x + 3y + 32 = 0$ (BC), $2x - y - 4 = 0$ (AC). Составить уравнения высоты и медианы, проведенных из вершины B , и найти их длины.

16. Найти плоскость, параллельную двум заданным параллельным плоскостям $2x + 3y - z - 1 = 0$ и $4x + 6y - 2z + 3 = 0$ и делящую расстояние между ними в отношении 2:3.

17. Написать уравнение плоскости:

- а) параллельной плоскости xOy и проходящей через точку $N(3; -5; 4)$;
- б) проходящей через ось Oz и через точку $P(2; -3; 2)$;
- в) параллельной оси Oy и проходящей через точки $Q(1; 3; 4)$ и $R(2; 5; -6)$.

Вопросы к экзамену (второй семестр)

1. Множества. Понятие функции. Способы задания функций.
2. Основные элементарные функции, их свойства и графики. Характеристика поведения функций.
3. Предел переменной величины. Свойства пределов.
4. Бесконечно малые и бесконечно большие величины. Их свойства. Связь переменной, предела и бесконечно малой.
5. Предел функции. Основные теоремы о пределах.
6. Односторонние пределы. Математические неопределенности.
7. Замечательные пределы.
8. Непрерывность функции в точке и на множестве. Точки разрыва функции. Классификация точек разрыва.
9. Арифметические действия над непрерывными функциями.
10. Непрерывность сложной функции.
11. Непрерывность обратной функции.
12. Свойства функций, непрерывных на отрезке (теоремы Коши и Вейерштрасса).
13. Производная функции, ее геометрический и механический смысл.
14. Уравнения касательной и нормали.
15. Дифференцируемость функции. Связь между дифференцируемостью и непрерывностью.
16. Правила дифференцирования функций.
17. Производная обратной функции.
18. Производная сложной функции.
19. Вычисление производных основных элементарных функций. Таблица производных.
20. Дифференцирование неявно заданных функций.
21. Дифференцирование параметрически заданных функций.
22. Производные высших порядков.
23. Дифференциал функции. Геометрический смысл дифференциала.
24. Основные свойства дифференциалов.
25. Инвариантность формы дифференциала первого порядка.
26. Приближенные вычисления с помощью дифференциала.
27. Дифференциалы высших порядков.
28. Основные теоремы дифференциального исчисления (Ферма, Ролля, Лагранжа, Коши).
29. Правила Лопиталя.
30. Применение производных к исследованию поведения функций.
31. Условия постоянства, возрастания и убывания функций на промежутке.
32. Необходимые и достаточные условия существования экстремума. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке.
33. Выпуклость - вогнутость, точки перегиба графика функции.

Достаточные условия выпуклости - вогнутости.

34. Условия существования точки перегиба графика функции.

35. Общий план исследования функций и построения графиков.

36. Первообразная.

37. Неопределенный интеграл и его свойства. Таблица интегралов.

Простейшие методы интегрирования. Метод подстановки.

38. Интегрирование по частям.

39. Интегрирование рациональных дробей

40. Интегрирование тригонометрических дифференциалов, универсальная тригонометрическая подстановка.

41. Интегрирование некоторых иррациональных выражений.

42. Определенный интеграл Основные свойства определенного интеграла.

Теорема о среднем.

43. Вычисление определенных интегралов. Формула Ньютона-Лейбница.

44. Приближенное вычисление определенных интегралов.

45. Несобственные интегралы с бесконечными пределами (1-го рода), их основные свойства.

46. Несобственные интегралы от неограниченных функций (2-го рода), их основные свойства.

47. Приложения определенного интеграла к задачам геометрии, механики, физики.

48. Понятие комплексного числа. Геометрическое изображение комплексных чисел.

49. Действия над комплексными числами.

50. Комплексные числа в алгебраической, тригонометрической и показательной формах.

51. Функции нескольких переменных. Область определения. Геометрическое изображение функции двух переменных.

52. Предел, непрерывность функции нескольких переменных.

53. Частные производные функции нескольких переменных, их геометрический смысл.

54. Полный дифференциал.

55. Применение дифференциала в приближенных вычислениях.

56. Дифференцирование функций, заданных неявно.

57. Дифференцирование сложной функции.

58. Экстремумы функции двух переменных, необходимые и достаточные условия существования экстремума. Условный экстремум.

59. Наименьшее и наибольшее значения функции в замкнутой области.

60. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям. Основные понятия теории дифференциальных уравнений.

61. Задача Коши, теорема существования и единственности решения задачи Коши. Особые решения.

62. Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными.

63. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка.

64. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка.

65. Дифференциальные уравнения Бернулли.

66. Дифференциальные уравнения первого порядка в полных дифференциалах.

67. Дифференциальные уравнения высших порядков, понятия решения общего и частного. Задача Коши, геометрический смысл.

68. Уравнения, допускающие понижение порядка.

69. Линейно-зависимые и линейно-независимые функции.

70. Линейные однородные дифференциальные уравнения n -го порядка. Структура общего решения.

71. Решение линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

72. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения n -го порядка с постоянными коэффициентами. Структура общего решения.

73. Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа).

74. Метод неопределенных коэффициентов нахождения частного решения линейных неоднородных дифференциальных уравнений со специальной правой частью.

75. Системы дифференциальных уравнений. Общие понятия. Методы решения.

Задачи к экзамену (второй семестр)

1. Вычислить пределы функций:

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 + x - 1}{3x^3 + x^2}$; б) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 5} - \sqrt{x^2 + x})$;

в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4-x} - 2}{2x}$; г) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 + x - 4}{x^2 + 5x - 6}$;

д) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos 4x}{x \sin x}$; е) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x+2}{2-x} \right)^{\frac{1}{x}}$.

2. Указать характер точек разрыва функции

1) $y = e^{\frac{1}{x-2}}$

$$2) y = \begin{cases} -x, & \text{если } x \leq 0, \\ -(x-1)^2, & \text{если } 0 < x < 2, \\ x-3, & \text{если } x \geq 2. \end{cases}$$

3. Найти производные функций:

а) $y = 3x^2 + \sqrt[3]{x} - \frac{1}{x^2} + 3$,

б) $y = \sin x \cdot \arctg x$,

в) $y = \frac{\cos x}{x - \sqrt[3]{x}}$,

г) $y = \sqrt[3]{\frac{1}{x^2 + 1}}$,

д) $y = \frac{1}{3}tg^3 x - tgx + x,$

е) $y = (1 + \ln \sin x)^2.$

4. Составить уравнения касательной и нормали к линии $y = x^2 - x + 1$ в точке с абсциссой $x_0 = -1$.

5. Найти производные функций, заданных неявно:

а) $y^2 + 2x^2y - x^2 = 0.$

б) $\cos y = 4y^2 + e^x.$

6. Найти производные функций, применяя логарифмическое дифференцирование:

а) $y = (\operatorname{arccotg} 4x)^{\frac{1}{x^2}}$

б) $y = \sqrt[4]{\frac{(6x - 3)x^3}{(1 - 5x^2)^2}}$

7. Найти производную функции, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x = t^3 + 3t + 1 \\ y = 3t^5 + 5t^3 + 1 \end{cases}$$

8. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$ на интервале $[0, 5]$.

9. Вычислить интегралы:

1) $\int \left(5x^2 - 2x + \frac{3}{\sqrt[3]{x^2}} \right) dx;$

2) $\int \frac{x^2}{(1 + 3x^3)^2} dx;$

3) $\int x^2 \ln x dx;$

4) $\int \frac{2x - 1}{x^2 - 3x + 2} dx;$

5) $\int \frac{x^4 + 2}{x^3 + 3x} dx;$

6) $\int \frac{dx}{1 + 3\cos x}.$

10. Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

а) $\int_e^{\infty} \frac{dx}{x \ln^3 x};$

б) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}.$

11. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой: $y = \frac{x^2}{2} - x + 1$ и

$y = -\frac{x^2}{2} + 3x + 6.$

12. Найти полные дифференциалы указанных функций:

а) $z = 7x^3y - \sqrt{xy};$

б) $z = xy^4 - 3x^2y + 1.$

13. Найти вторые частные производные указанных функций:

а) $z = e^{x^2 - y^2}$

б) $z = \operatorname{ctg}(x + y)$

14. Найти общее решение дифференциальных уравнений:

а) $(x^2 - y^2)y' = 2xy;$

б) $xy' - y = x^2;$

в) $2xyy' = (y')^2 - 1;$

г) $xy' + y = 3.$ г) $xy' + y = 3.$

15. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} x' = 4x + 5y \\ y' = -4x - 4y \end{cases}$$

Вопросы к экзамену (третий семестр)

1. Двойной интеграл.
2. Свойства двойного интеграла.
3. Геометрический смысл двойного интеграла.
4. Механический смысл двойного интеграла.
5. Вычисление двойного интеграла в декартовых координатах.
6. Вычисление двойного интеграла в полярных координатах.
7. Замена переменных в двойном интеграле.
8. Приложения двойного интеграла.
9. Тройной интеграл.
10. Вычисление тройного интеграла в декартовых координатах.
11. Замена переменных в тройном интеграле.
12. Тройной интеграл в цилиндрических координатах.
13. Тройной интеграл в сферических координатах.
14. Приложения тройного интеграла.
15. Криволинейный интеграл первого рода.
16. Свойства криволинейного интеграла первого рода.
17. Криволинейный интеграл второго рода.
18. Свойства криволинейного интеграла второго рода.
19. Вычисление криволинейного интеграла первого рода.
20. Вычисление криволинейного интеграла второго рода.
21. Независимость криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования.
22. Приложения криволинейных интегралов.
23. Поверхностный интеграл первого рода.
24. Свойства поверхностного интеграла первого рода.
25. Вычисление поверхностного интеграла первого рода.
26. Поверхностный интеграл второго рода.
27. Свойства поверхностного интеграла второго рода.
28. Вычисление поверхностного интеграла второго рода.
29. Приложения поверхностного интеграла первого рода.
30. Приложения поверхностного интеграла второго рода.
31. Связь между поверхностным интегралом второго рода и тройным. Формула Остроградского – Гаусса.
32. Связь между поверхностными и криволинейными интегралами второго рода. Формула Стокса.
33. Понятие комплексного числа.
34. Геометрическое изображение комплексных чисел.
35. Формы записи комплексных чисел.
36. Сложение и вычитание комплексных чисел.
37. Произведение комплексных чисел.
38. Деление комплексных чисел.

39. Извлечение корней из комплексных чисел.
40. Числовые ряды.
41. Сходимость ряда.
42. Сумма ряда
43. Ряд геометрической прогрессии.
44. Необходимое условие сходимости.
45. Гармонический ряд.
46. Признаки сравнения рядов.
47. Признак Даламбера.
48. Радикальный признак Коши.
49. Интегральный признак Коши.
50. Обобщенный гармонический ряд.
51. Знакопередающиеся ряды.
52. Признак Лейбница.
53. Общий достаточный признак знакопеременных рядов.
54. Абсолютная и условная сходимость.
55. Свойства абсолютно сходящихся рядов.
56. Оценка погрешности, допущенной при замене ряда частичной суммой.
57. Функциональные ряды.
58. Область сходимости, методы ее определения.
59. Степенные ряды.
60. Интервал и радиус сходимости степенных рядов.
61. Ряд Тейлора и Маклорена.
62. Разложение функций в степенные ряды.
63. Применения степенных рядов в приближенных вычислениях.
64. Ряды Фурье. Постановка задачи.
65. Ряды Фурье для четных, нечетных функций.
66. Ряды Фурье для функций с периодом $2l$.
67. Разложение непериодических функций в ряд Фурье.
68. Разложение в ряд Фурье функций произвольного периода.
69. Интеграле Фурье.
70. Комплексная форма ряда Фурье.

Задачи к экзамену (третий семестр)

1. В двойном интеграле $\int_D f(x, y) dx dy$ расставить пределы интегрирования двумя способами, если область D ограничена линиями $y = x^2$, $y = x + 2$, $x = 0$ ($x \geq 0$).
2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 - 1$, $y = 0$, $x = 0$ ($x \geq 0$).
3. Найти массу плоской пластинки D с поверхностной плотностью $\rho(x, y) = xy$, ограниченной линиями $y = x$, $y = 2x$, $x = 2$.
4. Найти объем тела V , ограниченного параболическим цилиндром $y = x^2$ и плоскостями $y + z = 4$, $z = 0$.
5. Найти массу плоской пластинки D с поверхностной плотностью $\rho(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, ограниченной линиями $x^2 + y^2 = 9$, $x^2 + y^2 = 4$, $x = 0$, $y = 0$ ($x \geq 0$, $y \geq 0$).
6. Найти $\int_{L_{OA}} 2xy dx + x^2 dy$, если L_{OA} — дуга кривой $y = \frac{x^2}{4}$, заключенная между

точками $O(0, 0)$ и $A(2; 1)$.

7. Вычислить работу, производимую силой $F = xy^2i + x^2yj$ вдоль отрезка прямой от точки $B(0, 0)$ до точки $C(2; 1)$.

8. Найти $\int_{L_{AB}} (xy - 1)dx + x^2ydy$, где L_{AB} - дуга эллипса $x = \cos t$, $y = 2\sin t$ от точки $A(1, 0)$ до точки $B(0; 2)$.

9. Даны комплексные числа $z_1 = 3 + 5i$, $z_2 = 3 - 4i$, $z_3 = 1 - 2i$. Найти число $z = \frac{(z_1 + z_3) \cdot \bar{z}_2}{z_3}$.

10. Представить в тригонометрической и показательной формах и изобразить на комплексной плоскости следующие комплексные числа:

а) $z_1 = 2 - 2i$; б) $z_2 = -i$; в) $z_3 = \sqrt{3} + i$.

11. Решить уравнения: а) $x^2 + 4x + 5 = 0$; б) $x^2 + 9 = 0$.

12. Ток меняется по закону $i = 90 \sin(\omega t - \frac{5\pi}{6})$ А. Найти комплексную амплитуду $\dot{I}$ тока и изобразить ее на комплексной плоскости.

13. Исследовать сходимость ряда.

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{1+n^2}}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{\sqrt{4n^3-3}}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+1}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$;

5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^{n+1}}$; 6) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{n+1}\right)^n$; 7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln^3(n+1)}$.

14. Выяснить, сходится ли данный ряд абсолютно, условно или расходится.

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3+1}$.

15. Найти область сходимости данного ряда.

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{n^2}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n \cdot 5^n}$.

16. Разложить данную функцию в ряд Маклорена и указать область сходимости полученного ряда.

1) $f(x) = \frac{1}{x+8}$; 2) $f(x) = \ln(1-2x)$.

17. Найти три первых, отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения $y = y(x)$ дифференциального уравнения $y' = 2e^x - y^3$, удовлетворяющего начальному условию $y(0) = 0$.

18. Разложить в ряд Фурье периодическую с периодом $T=4$ функцию

$$f(x) = \begin{cases} -\pi, & \text{при } -2 < x < 0, \\ \pi, & \text{при } 0 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Вопросы к экзамену (четвертый семестр)

1. Предмет и основные определения теории вероятностей.

2. Совместные и несовместные события, полная группа событий, противоположные события.

3. Комбинаторика: размещение, сочетания, перестановки и перестановки с повторениями.

4. Классическое определение вероятности. Свойства вероятности,

вытекающие из классического определения. Примеры.

5. Статистическое определение вероятности, его особенности и связь с классическим определением.
6. Теоремы сложения вероятностей.
7. Зависимые и независимые события. Условные и безусловные вероятности.
8. Теоремы умножения вероятностей.
9. Формула полной вероятности. Формулы Байеса.
10. Дискретные и непрерывные случайные величины. Закон распределения случайной величины и способы его задания.
11. Функция распределения случайной величины и ее свойства для дискретной и непрерывной случайных величин.
12. Математическое ожидание случайной величины. Его смысл и примеры.
13. Свойства математического ожидания.
14. Дисперсия и среднее квадратическое отклонение случайной величины. Их смысл и примеры вычисления.
15. Свойства дисперсии и среднего квадратического отклонения.
16. Начальные и центральные моменты. Асимметрия и эксцесс.
17. Формула Бернулли. Биномиальное распределение. Наивероятнейшее число наступления событий.
18. Формула Пуассона. Закон распределения редких событий.
19. Гипергеометрическое распределение.
20. Математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение частоты и частоты.
21. Непрерывные случайные величины. Дифференциальная и интегральная функции их распределения, их смысл и связь между ними.
22. Вероятность попадания случайной величины в заданный интервал. Вероятность того что непрерывная случайная величина примет точное наперед заданное значение.
23. Нормальное распределение. Плотность нормального распределения и ее свойства.
24. Нормированное (стандартное) нормальное распределение. Функция Лапласа: график, свойства, таблицы.
25. Функция нормального распределения случайной величины.
26. Вероятность попадания нормально распределенной случайной величины в заданный интервал.
27. Вероятность заданного отклонения нормальной случайной величины от своего математического ожидания. Правило трех сигм.
28. Равномерный закон распределения.
29. Показательный закон распределения.
30. Закон больших чисел. Понятие о теореме Чебышева. Значение теоремы Чебышева.
31. Закон больших чисел. Теорема Бернулли.
32. Вероятность отклонения частоты от вероятности, частоты от наивероятнейшего числа.
33. Понятие о центральной предельной теореме. Теорема Ляпунова.
34. Предмет и основные задачи математической статистики.
35. Понятие вариационного ряда. Дискретные и интервальные вариационные

ряды. Накопленные частоты и частости.

36. Графическое изображение вариационного ряда. Эмпирическая функция распределения.

37. Числовые характеристики вариационного ряда. Средняя арифметическая и ее свойства, мода и медиана. Квантили.

38. Показатели колеблемости: вариационный размах, среднее линейное отклонение, дисперсия, коэффициент вариации. Свойства дисперсии.

39. Моменты (начальные и центральные). Показатели асимметрии и эксцесса.

40. Генеральная совокупность и выборка. Сущность выборочного метода.

41. Повторная и бесповторная выборка. Ошибки регистрации и репрезентативности, предельная ошибка выборки.

42. Статистические оценки параметров распределения (сущность теории оценивания): несмещенность, состоятельность, эффективность оценок.

43. Точечная оценка генеральной средней по выборочной средней.

44. Точечная оценка генеральной дисперсии. “Исправленные” выборочная дисперсия и среднее квадратическое отклонение.

45. Интервальные оценки. Точность оценки. Доверительная вероятность.

46. Средняя ошибка выборки для средней и для доли.

47. Необходимая численность объема выборки.

48. Доверительные интервалы для оценки математического ожидания нормального распределения при известном среднем квадратическом отклонении.

49. Доверительные интервалы для оценки математического ожидания нормального распределения при неизвестном среднем квадратическом отклонении.

50. Оценка вероятности по частости: точечная и интервальная.

51. Законы распределения Стьюдента, Пирсона, Фишера.

52. Статистическая проверка гипотезы. Статистическая гипотеза: нулевая и альтернативная, параметрическая и непараметрическая. Ошибки I и II рода.

53. Статистический критерий проверки нулевой гипотезы. Наблюдаемое значение критерия. Критическая область. Область принятия гипотезы. Критические точки. Отыскание правосторонней, левосторонней, двусторонней критических областей. Понятие мощности критерия.

54. Проверка гипотезы о нормальном распределении. Критерий согласия Пирсона.

55. Проверка гипотезы о числовом значении дисперсии генеральной совокупности. Проверка гипотезы о равенстве двух дисперсий нормально распределенных генеральных совокупностей.

56. Проверка гипотезы о равенстве двух средних нормально распределенных генеральных совокупностей с известными дисперсиями.

57. Проверка гипотезы о числовом значении генеральной средней нормально распределенной генеральной совокупности при известной и неизвестной генеральных дисперсиях.

58. Проверка гипотезы о равенстве двух средних нормально распределенных генеральных совокупностей при неизвестных равных дисперсиях.

59. Проверка гипотезы о числовом значении генеральной доли (о параметре биномиального закона распределения).

60. Проверка гипотезы о равенстве двух долей нормально распределенных генеральных совокупностей.

Задачи к экзамену (четвертый семестр)

1. Издательство планирует выпустить в текущем году 6 различных учебников по статистике. Каким количеством способов можно выбрать 30 экземпляров, если в библиотеке университета должны быть представлены все виды изданных учебников по статистике?

2. Сколько различных «слов» можно составить из букв слова «колокол»?

3. Код банковского сейфа состоит из 8 цифр. Сколько можно составить различных кодовых комбинаций, если: а) цифры не повторяются? б) цифры повторяются?

4. В мореплавании принято давать сигналы, используя разноцветные флаги. Сколько сигналов можно составить, используя одновременно 8 флагов, из которых 1 красный, 2 синих, 3 зелёных и 2 белых?

5. В магазин бытовой техники поступила партия телевизоров: 20 телевизоров «Sony», 10 телевизоров «Panasonic» и 30 телевизоров «Samsung». Из партии случайным образом выбраны два телевизора для специального тестирования. Какова вероятность того, что а) один из них – телевизор «Samsung»? б) оба телевизора изготовлены одной фирмой?

6. В городе три коммерческих банка, оценка надежности, которых - 0,9, 0,7 и 0,6 соответственно. В связи с определением хозяйственных перспектив развития города администрацию интересуют ответы на следующие вопросы: а) какова вероятность того, что в течение года обанкротятся все три банка? б) не обанкротится хотя бы один банк? в) обанкротится только один банк? г) обанкротятся только два банка?

7. При покупке товаров на сумму, превышающую 500 рублей, покупателю предлагают билет беспроигрышной лотереи. В лотерее разыгрываются призы двух видов: 70 призов первого вида и 30 призов второго вида. Какова вероятность того, что первый покупатель, сделавший соответствующую покупку и получивший 3 лотерейных билета, станет обладателем: а) одинаковых призов? б) хотя бы двух призов первого вида? в) трех призов второго вида?

8. В командном зачете автогонок лидируют три команды. В случае если гоночный болид сойдет с трассы команда не получит зачетных очков. Эксперты оценивают вероятность схода болида первой команды как 0,1, второй – 0,15, третьей – 0,2. Определите вероятность того, что а) к финишу придут все болиды? б) хотя бы один болид? в) два болида сойдут с трассы?

9. В урне 12 белых, 5 красных и 3 черных шара. Наудачу вынимается три шара. Найдите вероятность того, что а) все шары будут красными? б) хотя бы один шар будет черным? в) два шара будут белыми?

10. Игральная кость бросается трижды. Определить вероятность того, что: а) хотя бы один раз выпадет 5 очков; б) три раза выпадет 6 очков; в) два раза выпадет 3 очка.

11. Строительная фирма ищет краску определенного цвета. Курьер звонит в 4 строительных магазина. Вероятность наличия необходимой краски в первом магазине равна 0,9, во втором – 0,92, в третьем – 0,8, в четвертом – 0,7. Какова вероятность того, что а) хотя бы в одном магазине окажется краска нужного цвета? б) во всех магазинах окажется краска нужного цвета? в) ни в одном магазине не окажется краски нужного цвета?

12. Вероятность того, что новый товар будет пользоваться спросом на рынке, если конкурент не выпустит в продажу аналогичный продукт, равна 0,58. Вероятность того, что товар будет пользоваться спросом при наличии на рынке конкурирующего товара 0,32. Вероятность того, что конкурирующая фирма выпустит аналогичный товар на рынок в течение интересующего нас периода 0,24. Чему равна вероятность того, что товар будет иметь успех?

13. Вероятность того, что клиент банка не вернет заем в период экономического роста, равна 0,06, а в период экономического кризиса - 0,23. Предположим, вероятность того, что начнется период экономического роста, равна 0,79. Чему равна вероятность того, что случайно выбранный клиент банка не вернет полученный кредит?

14. Экономист-аналитик условно подразделяет экономическую ситуацию в стране на “хорошую”, “посредственную” и “плохую” и оценивает их вероятности для данного момента времени в 0,25, 0,60 и 0,15 соответственно. Некоторый индекс экономического состояния возрастает с вероятностью 0,7, когда ситуация “хорошая”; с вероятностью 0,2, когда ситуация “посредственная”, и с вероятностью 0,1, когда ситуация “плохая”. Пусть в настоящий момент индекс экономического состояния возрос. Чему равна вероятность того, что экономика страны на подъеме?

15. Керамическая плитка одной марки, цвета и размера выпускается двумя цехами завода: первый цех выпускает 60% плитки, а второй 40%. Причем известно, что 8% продукции первого цеха имеют дефекты, тогда как этот же показатель для второго цеха равен 5%. Случайно взятая плитка имеет дефект. Чему равна вероятность того, что она выпущена первым цехом?

16. Опрос показал, что из 26 студентов, обучающихся в первой группе 18 ростовчан, а остальные живут в других городах, во второй группе 17 студентов-ростовчан, а остальные 10 живут в других городах. Из второй группы в первую был переведен один студент. После перевода один студент первой группы был вызван в деканат и оказалось, что это студент ростовчанин. Какова вероятность того, что из второй группы в первую был переведен студент-ростовчанин?

17. Страховая компания делит, водителей, заключивших договор автокаско на следующие группы риска: 1 группа – низкий риск; 2 группа - средний; 3 группа – высокий риск. Среди клиентов страховой компании 25% - первой группы; 65% - второй группы; 10% - третьей группы. Вероятность того, что страховое событие произойдет и страховая компания будет вынуждена выплатить страховое возмещение для первой группы риска оценивается как 0,1; для второй группы – 0,2; для третьей – 0,3. Какова вероятность того, что случайно выбранный клиент, получивший страховое возмещение, относится к группе среднего риска?

18. Работа сотрудников торгового зала супермаркета организована в две смены. В первой смене работают 5 мужчин и 7 женщин, во второй смене – 9 мужчин и 10 женщин. Из второй смены в первую был переведен один сотрудник. Во время работы первой смены клиент супермаркета пригласил сотрудника торгового зала для консультации. Консультировал клиента сотрудник – мужчина. Какова вероятность того, что из второй смены в первую была переведена женщина?

19. При производстве безалкогольных напитков специальный аппарат разливает определенное число унций (1 унция = 28,3 г) напитка в стандартную ёмкость. Число разлитых унций подчиняется нормальному закону с математическим ожиданием, зависящим от настройки аппарата. Количество унций напитка, разлитых

отдельным аппаратом, имеет стандартное отклонение $\sigma = 0,4$ унции. Пусть ёмкости объёмом в 8 унций наполняются кока-колой. Сколько унций напитка должен в среднем разливать аппарат, чтобы не более 3% ёмкостей оказались переполненными?

20. Налоговая инспекция утверждает, что нарушения налогового законодательства характерны для 35% предприятий города. Тщательной проверке были подвергнуты 59 предприятий. Чему равна вероятность того, что доля предприятий – нарушителей будет отличаться от истинной доли более чем на 0,12?

21. Опрос 20 горожан показал, что среднемесячные расходы на покупку журналов и газет составляют 125 рублей с исправленным средним квадратическим отклонением 60 рублей. Постройте 99% доверительный интервал для оценки среднемесячных расходов на прессу горожан в генеральной совокупности.

22. Для определения среднего размера дневной выручки маршрутных такси города была произведена 10%-ная случайная бесповторная выборка из 1200 маршрутных такси. В результате были получены данные о средней дневной выручке, которая составила 5000 рублей. В каких пределах с доверительной вероятностью 0,95 может находиться средняя дневная выручка всех маршрутных такси города, если среднее квадратическое отклонение составило 650 рублей?

23. Главный бухгалтер большой корпорации провел обследование по данным прошедшего года с целью выяснения доли некорректных счетов. Из 2000 выбранных счетов в 25 оказались некорректные проводки. Для уменьшения доли ошибок он внедрил новую систему. Год спустя он решил проверить, как работает новая система, и выбрал для проверки в порядке случайного отбора 3000 счетов компании. Среди них оказалось 30 некорректных. Можно ли утверждать, что новая система позволила уменьшить долю некорректных проводок в счетах? Принять уровень значимости $\alpha = 0,05$.

24. На предприятии исследовалось изменение расхода сырья на производство продукции в условиях применения новой и старой технологий изготовления изделий. Выборочная дисперсия расхода сырья на изделие по новой технологии составила 124 кв.ед., а по старой – 189 кв.ед. Считая, что расход сырья на изделие по старой и новой технологии имеет нормальный закон распределения с одинаковыми дисперсиями, выяснить, существенны ли различия в вариации расхода сырья на изделие при использовании старой и новой технологий. Ответ дать на 1% уровне значимости, применив двухстороннюю альтернативную гипотезы, если $n_1 = n_2 = 10$.

Критерии и шкала оценивания по оценочному средству промежуточный контроль (экзамен)

Шкала оценивания	Характеристика знания предмета и ответов
отлично (5)	Студент глубоко и в полном объеме владеет программным материалом. Грамотно, исчерпывающе и логично его излагает в устной или письменной форме. При этом знает рекомендованную литературу, проявляет творческий подход в ответах на вопросы и правильно обосновывает принятые решения, хорошо владеет умениями и навыками при выполнении практических задач.

хорошо (4)	Студент знает программный материал, грамотно и по сути излагает его в устной или письменной форме, допуская незначительные неточности в утверждениях, трактовках, определениях и категориях или незначительное количество ошибок. При этом владеет необходимыми умениями и навыками при выполнении практических задач.
удовлетворительно (3)	Студент знает только основной программный материал, допускает неточности, недостаточно четкие формулировки, непоследовательность в ответах, излагаемых в устной или письменной форме. При этом недостаточно владеет умениями и навыками при выполнении практических задач. Допускает до 30% ошибок в излагаемых ответах.
неудовлетворительно (2)	Студент не знает значительной части программного материала. При этом допускает принципиальные ошибки в доказательствах, в трактовке понятий и категорий, проявляет низкую культуру знаний, не владеет основными умениями и навыками при выполнении практических задач. Студент отказывается от ответов на дополнительные вопросы.

Экспертное заключение

Представленный фонд оценочных средств (далее – ФОС) по дисциплине «Высшая математика» соответствует требованиям ФГОС ВО.

Предлагаемые формы и средства текущего и промежуточного контроля адекватны целям и задачам реализации основной профессиональной образовательной программы по направлению подготовки 05.03.06 Экология и природопользование.

Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины представлены в полном объеме.

Виды оценочных средств, включенные в представленный фонд, отвечают основным принципам формирования ФОС.

Разработанный и представленный для экспертизы фонд оценочных средств рекомендуется к использованию в процессе подготовки бакалавров по указанному направлению подготовки.

Председатель учебно-методической
комиссии Антрацитовского института
геосистем и технологий



И.В. Савченко

Лист изменений и дополнений

№ п/п	Виды дополнений и изменений	Дата и номер протокола заседания кафедры (кафедр), на котором были рассмотрены и одобрены изменения и дополнения	Подпись (с расшифровкой) заведующего кафедрой (заведующих кафедрами)