

**Комплект оценочных материалов по дисциплине
«Математический анализ»**

Задания закрытого типа

Задания закрытого типа на выбор правильного ответа

1. Выберите один правильный ответ

Вычислить $|1 - \sqrt{2}| + |\sqrt{2} - 3| + 4$.

А) 2

Б) $2\sqrt{2}$

В) 6

Г) $-2\sqrt{2}$

Правильный ответ: В

Компетенции: УК-6, ОПК-1

2. Выберите один правильный ответ

Для функции $f(x) = 3x^2 - 2x - 1$ найти $f(-1) + f'(1)$.

А) 8

Б) 4

В) 0

Г) 1

Правильный ответ: А

Компетенции: УК-6, ОПК-1

3. Выберите один правильный ответ

Найти предел числовой последовательности $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^2 + 5}{3n^2 - 3n + 7}$

А) ∞

Б) 0

В) 2

Г) $\frac{5}{7}$

Правильный ответ: В

Компетенции: УК-6, ОПК-1

4. Выберите один правильный ответ

Даны функции $f(x) = \sin x$, $g(x) = \sqrt{x}$. Найти значение их композиции:

$$g\left(f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

А) $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$

Б) $1 + \sqrt{\frac{\pi}{2}}$

В) 0

Г) 1

Правильный ответ: Г

Компетенции: УК-6, ОПК-1

5. Выберите один правильный ответ

Какой из неопределенных интегралов дает в результате $2 \arctg x + C$?

А) $\int \frac{2 dx}{2x-1}$

Б) $\int \frac{x dx}{x^2-1}$

В) $\int \frac{dx}{x^2-1}$

Г) $\int \frac{2 dx}{x^2+1}$

Правильный ответ: Г

Компетенции: УК-6, ОПК-1

6. Выберите один правильный ответ

Неопределенный интеграл $\int x^3 dx$ равен:

А) $\frac{x^2}{2} + C$

Б) $3x^2 + C$

В) $\frac{x^3}{3} + C$

Г) $\frac{x^4}{4} + C$

Правильный ответ: Г

Компетенции: УК-6, ОПК-1

7. Выберите один правильный ответ

Неопределенный интеграл $\int 5^x dx$ равен:

А) $5^x \cdot \ln 5 + C$

Б) $\frac{x^5}{5} + C$

В) $\frac{5^x}{\ln 5} + C$

Г) $x \cdot 5^x + C$

Правильный ответ: В

Компетенции: УК-6, ОПК-1

8. Выберите один правильный ответ

Неопределенный интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ равен:

А) $\arcsin \frac{x}{a} + C$

Б) $\arccos \frac{a}{x} + C$

В) $-\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}} + C$

Г) $\arcsin \frac{a}{x} + C$

Правильный ответ: А

Компетенции: УК-6, ОПК-1

9. Выберите один правильный ответ

Для функции $y = \cos 2x$ найти все первообразные.

А) $\frac{1}{2} \sin 2x$

Б) $-\frac{1}{2} \sin 2x + C$

В) $\frac{1}{2} \sin x + C$

Г) $\frac{1}{2} \sin 2x + C$

Правильный ответ: Г

Компетенции: УК-6, ОПК-1

10. Выберите один правильный ответ

Найти частные производные первого порядка для функции от двух переменных $z = y^x$.

А) $\frac{\partial z}{\partial x} = x \cdot y^{x-1}, \frac{\partial z}{\partial y} = y^x \cdot \ln y$

Б) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} = x \cdot y^{x-1}$

В) $\frac{\partial z}{\partial x} = y^x \cdot \ln y, \frac{\partial z}{\partial y} = x \cdot y^{x-1}$

Г) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} = y^x \cdot \ln y$

Правильный ответ: В

Компетенции: УК-6, ОПК-1

11. Выберите один правильный ответ

Найти градиент $\text{grad } z$ функции $z = x^2 + y^3$ в точке $M(1; 3)$.

А) (2; 27)

Б) (3; 27)

В) (1; 9)

Г) (2; 9)

Правильный ответ: А

Компетенции: УК-6, ОПК-1

12. Выберите все правильные варианты ответов

Какие из данных пределов равны 1?

А) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{15x+1}{15x-6}$

$$\text{Б) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

$$\text{В) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{\sin x}$$

$$\text{Г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{\sin 3x}$$

$$\text{Д) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x}$$

Правильный ответ: А, В, Д

Компетенции: УК-6, ОПК-1

13. Выберите все правильные варианты ответов

Какие из следующих функций имеют область определения, равную:

$$D_y = (-\infty, 6)?$$

$$\text{А) } y = \ln(6 - x)$$

$$\text{Б) } y = \frac{1}{6-x}$$

$$\text{В) } y = \frac{1}{\sqrt{6-x}}$$

$$\text{Г) } y = \sqrt[3]{6-x}$$

$$\text{Д) } y = \frac{6-x}{2}$$

Правильный ответ: А, В

Компетенции: УК-6, ОПК-1

14. Выберите все правильные варианты ответов

Какие из определенных интегралов равны 2?

$$\text{А) } \int_1^e \frac{2}{x} dx$$

$$\text{Б) } \int_1^3 x^2 dx$$

$$\text{В) } \int_0^1 4x dx$$

$$\text{Г) } \int_0^\pi \cos \frac{x}{2} dx$$

Правильный ответ: А, В, Г

Компетенции: УК-6, ОПК-1

15. Выберите все правильные варианты ответов

Какие из данных числовых рядов являются расходящимися?

$$\text{А) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$$

$$\text{Б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$$

$$\text{В) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$$

$$\text{Г) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (n+3)}$$

Правильный ответ: А, Б, В

Компетенции: УК-6, ОПК-1

Задания закрытого типа на установление соответствия

1. Установите правильное соответствие. Каждому элементу левого столбца соответствует только один элемент правого столбца.

	Функция $y(x)$		Производная $y'(x)$
1)	$y = 2\arctg x$	А)	$y' = -\frac{2}{1+4x^2}$
2)	$y = \operatorname{arcctg} 2x$	Б)	$y' = \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$
3)	$y = \arcsin(-2x)$	В)	$y' = -\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$
4)	$y = \arccos(-2x)$	Г)	$y' = \frac{2}{1+x^2}$

Правильный ответ:

1	2	3	4
Г	А	В	Б

Компетенции: УК-6, ОПК-1

2. Установите правильное соответствие. Каждому элементу левого столбца соответствует только один элемент правого столбца.

Установить соответствие между эквивалентными бесконечно малыми функциями при $x \rightarrow 0$:

	Бесконечно малая функция при $x \rightarrow 0$		Эквивалентная бесконечно малая функция при $x \rightarrow 0$
1)	$1 - \cos x$	А)	$2x$
2)	$\sin 2x$	Б)	\sqrt{x}
3)	$\ln(1+x^2)$	В)	x^2
4)	$\operatorname{tg} \sqrt{x}$	Г)	$x^2/2$

Правильный ответ:

1	2	3	4
Г	А	В	Б

Компетенции: УК-6, ОПК-1

3. Установите правильное соответствие. Каждому элементу левого столбца соответствует только один элемент правого столбца.

	Простейшее неравенство с модулем		Способы решения
1)	$ x < 5$	А)	$\begin{cases} x \geq 5 \\ x \leq -5 \end{cases}$
2)	$ x > 5$	Б)	$\begin{cases} x \geq -5 \\ x \leq 5 \end{cases}$
3)	$ x \leq 5$	В)	$\begin{cases} x > 5 \\ x < -5 \end{cases}$

4)	$ x \geq 5$	Г)	$\begin{cases} x > -5 \\ x < 5 \end{cases}$
----	--------------	----	---

Правильный ответ:

1	2	3	4
Г	В	Б	А

Компетенции: УК-6, ОПК-1

4. Установите правильное соответствие. Каждому элементу левого столбца соответствует только один элемент правого столбца.

Даны множества $A = (0; 2)$, $B = [1; 3]$.

	Операции над множествами А и В		Результат
1)	$A \cup B$	А)	$[2; 3]$
2)	$A \cap B$	Б)	$(0; 3]$
3)	$A \setminus B$	В)	$(0; 1)$
4)	$B \setminus A$	Г)	$[1; 2)$

Правильный ответ:

1	2	3	4
Б	Г	В	А

Компетенции: УК-6, ОПК-1

5. Установите правильное соответствие. Каждому элементу левого столбца соответствует только один элемент правого столбца.

	Неопределенный интеграл		Значение
1)	$\int \frac{dx}{\sqrt{3-x^2}}$	А)	$\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{3}} + C$
2)	$\int \frac{dx}{3+x^2}$	Б)	$\frac{1}{2\sqrt{3}} \ln \left \frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}} \right + C$
3)	$\int \frac{dx}{x^2-3}$	В)	$\ln \left x + \sqrt{x^2+3} \right + C$
4)	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3}}$	Г)	$\operatorname{arcsin} \frac{x}{\sqrt{3}} + C$

Правильный ответ:

1	2	3	4
Г	А	Б	В

Компетенции: УК-6, ОПК-1

6. Установите правильное соответствие. Каждому элементу левого столбца соответствует только один элемент правого столбца.

	Свойства определенного интеграла		Формулы
1)	Теорема о среднем значении определенного интеграла	А)	$\int_a^b \lambda f(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx$

2)	Аддитивность определенного интеграла	Б)	$\int_a^b (f(x) \pm g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$
3)	Однородность определенного интеграла	В)	$\int_a^b f(x) dx = f(C)(b-a)$
4)	Формула Ньютона-Лейбница	Г)	$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$

Правильный ответ:

1	2	3	4
В	Б	А	Г

Компетенции: УК-6, ОПК-1

7. Установите правильное соответствие. Каждому элементу левого столбца соответствует только один элемент правого столбца.

	Тригонометрические подстановки при нахождении интеграла вида $\int R(\sin x, \cos x) dx$		Применение
1)	$t = tg \frac{x}{2}$	А)	имеется нечетность по $\sin x$
2)	$t = \cos x$	Б)	имеется нечетность по $\cos x$
3)	$t = \sin x$	В)	одинаковая четность по $\sin x$ и $\cos x$
4)	$t = tg x$ (или $t = ctg x$)	Г)	подходит всегда

Правильный ответ

1	2	3	4
Г	А	Б	В

Компетенции: УК-6, ОПК-1

8. Установите правильное соответствие. Каждому элементу левого столбца соответствует только один элемент правого столбца.

	Определенный интеграл		Значение
1)	$\int_1^e \frac{dx}{x}$	А)	1
2)	$\int_0^2 4 dx$	Б)	$e - 1$
3)	$\int_0^1 e^x dx$	В)	8
4)	$\int_0^{\pi/4} \frac{2 dx}{\cos^2 x}$	Г)	2

Правильный ответ:

1	2	3	4
А	В	Б	Г

Компетенции: УК-6, ОПК-1

9. Установите правильное соответствие. Каждому элементу левого столбца соответствует только один элемент правого столбца.

	Ряд		Название
1)	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$	А)	степенной ряд
2)	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$	Б)	гармонический ряд
3)	$\sum_{n=1}^{\infty} (\sin nx + \cos nx)$	В)	тригонометрический ряд
4)	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$	Г)	знакопеременный ряд

Правильный ответ:

1	2	3	4
Б	А	В	Г

Компетенции: УК-6, ОПК-1

10. Установите правильное соответствие. Каждому элементу левого столбца соответствует только один элемент правого столбца.

	Функция		Разложение в ряд Маклорена
1)	e^x	А)	$1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$
2)	$\cos x$	Б)	$\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots$
3)	$\sin x$	В)	$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$
4)	$\frac{1}{1-x}$	Г)	$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \dots$

Правильный ответ:

1	2	3	4
В	Г	Б	А

Компетенции: УК-6, ОПК-1

11. Установите правильное соответствие. Каждому элементу левого столбца соответствует только один элемент правого столбца.

Двойной интеграл по области D	Значение
---------------------------------	----------

1)	$\iint_D dx dy$ $D: \{0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1\}$	А)	2
2)	$\iint_D dx dy$ $D: \{0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 0\}$	Б)	0
3)	$\iint_D dx dy$ $D: \{x = 1; y = 0; y = x\}$	В)	1
4)	$\iint_D dx dy$ $D: \{0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 2\}$	Г)	$\frac{1}{2}$

Правильный ответ:

1	2	3	4
В	Б	Г	А

Компетенции: УК-6, ОПК-1

12. Установите правильное соответствие. Каждому элементу левого столбца соответствует только один элемент правого столбца.

	Тройной интеграл по V		Значение
1)	$\iiint_V dx dy dz$ $V: \{0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1; 0 \leq z \leq 1\}$	А)	$\frac{2}{3}\pi R^3$
2)	$\iiint_V dx dy dz$ $V: \left\{ \begin{array}{l} -R \leq x \leq R; \\ -\sqrt{R^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{R^2 - x^2}; \\ 0 \leq z \leq \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \end{array} \right\}$	Б)	1
3)	$\iiint_V dx dy dz$ $V: \{0 \leq z \leq 1; x^2 + y^2 = 1\}$	В)	$\frac{1}{6}$
4)	$\iiint_V dx dy dz$	Г)	$2\pi R^2$

	$V: \{-1 \leq z \leq 1; x^2 + y^2 = R^2\}$		
--	--	--	--

Правильный ответ:

1	2	3	4
Б	А	В	Г

Компетенции: УК-6, ОПК-1

Задания закрытого типа на установление правильной последовательности

1. Расположить значения $y'(x_0)$ производных функций в точке x_0 в порядке возрастания их величин:

А) $y = 4 + \ln x, x_0 = \frac{1}{2}$

Б) $y = 10 - 3x - 2x^2, x_0 = -1$

В) $y = (x + 3) \cdot \operatorname{tg} x, x_0 = 0$

Г) $y = \sqrt{1 + x}, x_0 = 0$

Правильный ответ: Г, Б, А, В

Компетенции: УК-6, ОПК-1

2. Расположите пределы в порядке убывания их значений:

А) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 4}{x^2 - x - 2}$

Б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$

В) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x}\right)^x$

Г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 + x + 1}{10x^4 - x - 2}$

Правильный ответ: Г, В, А, Б

Компетенции: УК-6, ОПК-1

3. Расположите определенные интегралы в порядке возрастания их значений:

А) $\int_0^1 x^2 dx$

Б) $\int_0^1 \frac{4}{1+x^2} dx$

В) $\int_0^1 dx$

Г) $\int_0^1 3e^x dx$

Правильный ответ: А, В, Б, Г

Компетенции: УК-6, ОПК-1

4. Расположить простые рациональные дроби в правильной последовательности, соответствующей их названиям.

- А) $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$
 Б) $\frac{A}{(x-a)^k}$, $k = 2, 3, \dots$
 В) $\frac{A}{x-a}$
 Г) $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}$, $m = 2, 3, \dots$

Правильный ответ: В, Б, А, Г

Компетенции: УК-6, ОПК-1

5. Расположите значения функции $z(x_0 = 1; y_0 = 1)$ в порядке убывания:

- А) $z(x; y) = 2x + 3y^2$
 Б) $z(x; y) = \ln(xy) + 2$
 В) $z(x; y) = \ln x + \ln y + 1$
 Г) $z(x; y) = y \cdot \sin(\pi x)$

Правильный ответ: А, Б, В, Г

Компетенции: УК-6, ОПК-1

6. Расположите интегралы в порядке убывания их значений:

- А) $\int_0^1 dx \int_0^1 dy$
 Б) $\int_0^1 dx \int_0^x dy$
 В) $\int_0^1 dx \int_0^{x^2} dy$
 Г) $\int_0^1 dx \int_{-1}^1 dy$

Правильный ответ: Г, А, Б, В

Компетенции: УК-6, ОПК-1

Задания открытого типа

Задания открытого типа на дополнение

1. Напишите пропущенное слово (словосочетание).

Закончить формулировку определения. Ответ дать в именительном падеже.

Пусть x_0 – точка разрыва для функции f , определенной в окрестности $U^*(x_0)$, тогда если существуют конечные левый и правый пределы $f(x_0 -)$, $f(x_0 +)$ для функции f при $x \rightarrow x_0$, то точка x_0 называется _____.

Правильный ответ: точка разрыва первого рода.

Компетенции: УК-6, ОПК-1

2. Напишите пропущенное слово (словосочетание).

_____ – это функция f , областью определения которой является множество натуральных чисел $D_f = N$.

Правильный ответ: числовая последовательность.

Компетенции: УК-6, ОПК-1

3. Напишите пропущенное слово (словосочетание).

_____ – предел отношения приращения функции к приращению её аргумента при стремлении приращения аргумента к нулю (при условии, что такой предел существует).

Правильный ответ: производная; производная функции.

Компетенции: УК-6, ОПК-1

4. Напишите пропущенное слово (словосочетание).

_____ для функции $f(x)$ – это такая функция, производная которой равна $f(x)$.

Правильный ответ: первообразная.

Компетенции: УК-6, ОПК-1

5. Напишите пропущенное слово (словосочетание).

Интеграл называется _____, если выполняется по крайней мере одно из следующих условий: 1) область интегрирования является бесконечной; 2) подынтегральная функция является неограниченной в окрестности некоторых точек области интегрирования.

Правильный ответ: несобственным.

Компетенции: УК-6, ОПК-1

6. Напишите пропущенное слово (словосочетание).

Плоская фигура, ограниченная сверху графиком неотрицательной функции $y = f(x)$, снизу – прямой $y = 0$, слева и справа – соответственно прямыми $x = a$ и $x = b$, – это _____.

Правильный ответ: криволинейная трапеция.

Компетенции: УК-6, ОПК-1

7. Напишите пропущенное слово (словосочетание).

Геометрический смысл двойного интеграла заключается в том, что величина двойного интеграла от неотрицательной функции равна _____ цилиндрического тела.

Правильный ответ: объёму.

Компетенции: УК-6, ОПК-1

8. Напишите пропущенное слово (словосочетание).

Закончить формулировку теоремы Лейбница.

Если модуль общего члена знакопеременующегося числового ряда стремится к нулю, убывая, то этот ряд _____

Правильный ответ: сходится.

Компетенции: УК-6, ОПК-1

9. Напишите пропущенное слово (словосочетание).

_____ функции f в точке M_0 – это вектор, координатами которого являются значения частных производных в этой точке.

Правильный ответ: градиент.

Компетенции: УК-6, ОПК-1

10. Напишите пропущенное слово (словосочетание).

Если числовой ряд сходится, то предел его общего члена равен _____.

Правильный ответ: нулю.

Компетенции: УК-6, ОПК-1

14. Напишите пропущенное слово (словосочетание).

_____ – частный случай ряда Тейлора, где точка разложения равна нулю.

Правильный ответ: Ряд Маклорена.

Компетенции: УК-6, ОПК-1

Задания открытого типа с кратким свободным ответом

1. Производная функция $y(x) = \cos(x^2)$ равна ... (*Ответ запишите в виде функции*)

Правильный ответ: $-2x \sin x^2$.

Компетенции: УК-6, ОПК-1

2. Найти промежутки возрастания функции $y(x) = 1 - x^2$ (*Ответ запишите в виде интервала*)

Правильный ответ: $(-\infty; 0)$.

Компетенции: УК-6, ОПК-1

3. Точка движется прямолинейно по закону $s = \frac{4}{3}t^3 - t + 5$ (м). Найти скорость материальной точки в момент времени $t = 2$ (с). (*Ответ запишите в виде числа*)

Правильный ответ: 15.

Компетенции: УК-6, ОПК-1

4. Найти наибольшее значение функции $y(x) = x^2 - 2x - 1$ на отрезке $[-1; 1]$ (*Ответ запишите в виде числа*)

Правильный ответ: 2.

Компетенции: УК-6, ОПК-1

5. Найти сумму абсцисс точек разрыва функции:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x < 0 \\ \cos x, & 0 \leq x \leq 1 \\ x^2 - 1, & x > 1 \end{cases}$$

(Ответ запишите в виде числа)

Правильный ответ: 1.

Компетенции: УК-6, ОПК-1

6. Найти промежуток, на котором график функции $y = 3x^2 - x^3$ выпуклый вниз? (Ответ запишите в виде промежутка)

Правильный ответ: $(-\infty; 1)$.

Компетенции: УК-6, ОПК-1

7. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 0; y = 2x; x = 1$ (Ответ запишите в виде числа)

Правильный ответ: 1.

Компетенции: УК-6, ОПК-1

8. Скорость тела определяется формулой $v(t) = \sqrt{1+t}$ (м/с). Найти путь, пройденный телом за промежуток времени от $t_1 = 0$ (с) до $t_2 = 8$ (с). (Ответ запишите в виде рационального числа)

Правильный ответ: $\frac{52}{3}$

Компетенции: УК-6, ОПК-1

9. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями $y = 2\sqrt{x}, 0 \leq x \leq 2, y > 0$. (Ответ запишите в виде числа)

Правильный ответ: 8π .

Компетенции: УК-6, ОПК-1

10. Установить сходимость или расходимость несобственного интеграла первого рода $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$ (Ответ записать одним словом)

Правильный ответ: сходится.

Компетенции: УК-6, ОПК-1

11. Установить сходимость или расходимость несобственного интеграла второго рода $\int_0^2 \frac{dx}{x\sqrt{x}}$? (Ответ записать одним словом)

Правильный ответ: расходится.

Компетенции: УК-6, ОПК-1

12. Вычислить определенный интеграл $\int_0^1 \arccos x dx$. (Ответ запишите в виде числа)

Правильный ответ: 1.
Компетенции: УК-6, ОПК-1

13. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 5^n}$. (Ответ запишите в виде промежутка)

Правильный ответ: $[-5; 5)$
Компетенции: УК-6, ОПК-1

14. Для функции $z = \ln(e^x + e^y)$ от двух переменных найти $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}$.

Правильный ответ: 1
Компетенции: УК-6, ОПК-1

15. Найти двойной интеграл $\iint_D xy \, dx \, dy$, если область D ограничена линиями: $x = 0, x = 1, y = 0, y = 2$.

Правильный ответ: 1.
Компетенции: УК-6, ОПК-1

16. Разложением какой функции является следующий ряд Маклорена:
 $1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \dots$ (Ответ запишите в виде $y = f(x)$)

Правильный ответ: $y = \cos x$.
Компетенции: УК-6, ОПК-1

Задания открытого типа с развернутым ответом

1. Решить задачу, используя методы дифференциального исчисления:
Каковы должны быть размеры консервной банки цилиндрической формы, чтобы на её изготовление пошло наименьшее количество материала, если объем банки 2000 см^3 ?

Привести расширенное решение.
Время выполнения – 30 мин.

Ожидаемый результат:

1. По условию объем цилиндра $V = \pi R^2 H = 2000$.

Принимая радиус основания цилиндра $R = x$, получаем высоту цилиндра $H = \frac{2000}{\pi x^2}$.

Функция площади полной поверхности цилиндра:

$$S(x) = 2\pi R^2 + 2\pi R H$$
$$S(x) = 2\pi \left(x^2 + \frac{2000}{\pi x} \right)$$

2. Находим критические точки:

$$S'(x) = 2\pi \left(x^2 + \frac{2000}{\pi x} \right)' = 2\pi \cdot \frac{2\pi x^3 - 2000}{\pi x^2}$$

$S'(x) = 0$ тогда и только тогда, когда $2\pi x^3 - 2000 = 0$, откуда $x^3 = \frac{1000}{\pi}$.

Имеем критическую точку: $x = \sqrt[3]{\frac{1000}{\pi}} = \frac{10}{\sqrt[3]{\pi}}$.

3. Достаточное условие экстремума выполняется, так как $S''\left(\frac{10}{\sqrt[3]{\pi}}\right) > 0$, значит в найденной точке функция достигает минимального значения, что соответствует условию.

4. Тогда высота оптимальной банки: $H = \frac{2000}{\pi x^2} = \frac{2000}{\pi \left(\frac{10}{\sqrt[3]{\pi}}\right)^2} = \frac{20}{\sqrt[3]{\pi}}$

Ответ: оптимальные параметры цилиндрической консервной банки:

$$R = \frac{10}{\sqrt[3]{\pi}}, \quad H = \frac{20}{\sqrt[3]{\pi}}$$

Критерии оценивания:

- корректное построение функции площади полной поверхности объемного тела;
- использование аппарата дифференциального исчисления для нахождения экстремальных параметров объемного тела;
- проверка достаточного условия существования экстремума;
- определение экстремальных параметров цилиндра.

Компетенции: УК-6, ОПК-1

2. Решить задачу, используя методы дифференциального исчисления:

При подготовке к экзамену студент за t дней изучает $\left(\frac{t}{t+1}\right)$ -ю часть курса и забывает $(1/36 \cdot t)$ -ю часть. Сколько дней нужно потратить на подготовку, чтобы была изучена максимальная часть курса?

Привести расширенное решение.

Время выполнения – 30 мин.

Ожидаемый результат:

1. Составим функцию $V(t)$, которая отражает объем изученного студентом учебного материала в ходе прохождения курса:

$$V(t) = \left(\frac{t}{t+1}\right) - \left(\frac{1}{36} \cdot t\right)$$

2. Находим экстремум функции $V(t)$ учитывая, что $t > 0$:

$$V'(t) = \left(\frac{t}{t+1}\right)' - \left(\frac{1}{36} \cdot t\right)' = \frac{1}{(t+1)^2} - \frac{1}{36}$$

$$V'(t) = 0 \Rightarrow t_k = 5 \text{ дней}$$

3. Убедимся, что $t_k = 5$ дней – точка максимума функции $V(t)$:

$$V''(t) = \frac{-2}{(t+1)^3}$$

$$V''(t_k = 5) = \frac{-2}{(6)^3} < 0 \Rightarrow t_k = 5 \text{ дней} - \text{т. max}$$

Ответ: максимальная часть курса будет изучена через 5 дней.

Критерии оценивания:

- построение функции $V(t)$, отражающей объем изученного студентом учебного материала в ходе прохождения курса;
- нахождение экстремума функции $V(t)$;
- доказательство того, что найденный экстремум есть максимум.

Компетенции: УК-6, ОПК-1

3. Решить задачу, используя прикладные аспекты интегрального исчисления:

Найти площадь фигуры, ограниченной эллипсом $\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t, \end{cases}$ где $a, b = \text{const}$, t – параметр.

Привести расширенное решение.

Время выполнения – 25 мин.

Ожидаемый результат:

1. Анализ формы и расположения эллипса.

Запишем уравнение эллипса, заданного параметрически, в декартовых координатах:

$$\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t, \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{x}{a} = \cos t, \\ \frac{y}{b} = \sin t. \end{cases}$$

Возводим в квадрат и суммируем уравнения последней системы:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \cos^2 t + \sin^2 t$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Таким образом, имеем эллипс с полуосями a, b и центром – в начале координат.

2. Нахождение части искомой площади.

Исходя из симметрии эллипса при таком его расположении, удобно найти площадь его четверти, т.к. $S_{\text{элл}} = 4 \cdot S_{1/4}$.

Площадь $S_{1/4}$ находим по формуле для параметрически заданной кривой:

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad t_1 \leq t \leq t_2$$

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \psi(t) \varphi'(t) dt$$

Имеем по условию: $\varphi(t) = a \cos t$, $\psi(t) = b \sin t$. Тогда $\varphi'(t) = -a \sin t$, пределы интегрирования $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

3. Нахождение площади целой фигуры.

Тогда искомая площадь:

$$S_{\text{элли}} = 4 \cdot S_{1/4} = 4 \int_{\pi/2}^0 b \sin t \cdot a \sin t dt = 4 ab \int_0^{\pi/2} \sin^2 t dt =$$
$$= 4 ab \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt = \frac{4 ab}{2} \left(t - \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\pi/2} = 2ab \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \sin \pi \right) = \pi ab$$

Таким образом, искомая площадь $S = \pi ab$ (кв. ед)

Ответ: площадь фигуры, ограниченной эллипсом, равна πab .

Критерии оценивания:

- анализ формы и расположения эллипса;
- переход к декартовым координатам;
- использование формулы площади плоской фигуры при параметрическом ее задании;
- применение свойств определенного интеграла и стандартных методов интегрирования.

Компетенции: УК-6, ОПК-1

4. Решить задачу, используя методы интегрального исчисления:

Цилиндрический резервуар с высотой 6 м и диаметром основания 4 м наполнен водой. За какое время вода вытечет из него через круглое отверстие радиуса 1/12 м, сделанное в дне резервуара?

(Справочная информация: скорость истечения жидкости по закону Бернулли выражается формулой $V = \sigma \sqrt{2gx}$, причем для воды $\sigma \approx 0,6$).

Привести расширенное решение.

Время выполнения – 30 мин.

Ожидаемый результат:

1. Пусть через t сек после истечения воды уровень оставшейся воды в резервуаре был равен x м, а за время dt сек понизился на dx м. вычислим объем воды, вытекающий за этот бесконечно малый промежуток времени dt , двумя способами:

1 сп.) Объем dW равен объему цилиндрического слоя высотой dx и радиусом основания $r = 2$ м.

$$dW = \pi r^2 dx$$

2 сп.) Объем dW равен объему цилиндра, основанием которого служит отверстие в дне резервуара $\rho = 1/12$ м, а высота равна Vdt , где V – скорость течения воды:

$$dW = \pi \rho^2 V dt = 0,6 \pi \rho^2 \sqrt{2gx} dt$$

Приравниваем полученные выражения:

$$\pi r^2 dx = 0,6 \pi \rho^2 \sqrt{2gx} dt$$

Получаем:

$$dt = \frac{r^2 dx}{0,6\rho^2 \sqrt{2gx}}, \quad \text{где } x \in [0; 6]$$

2. Интегрируем уравнение, получаем время истечения воды:

$$t = \int_0^6 \frac{r^2 dx}{0,6\rho^2 \sqrt{2gx}} = \frac{r^2 dx}{0,6\rho^2 \sqrt{2g}} \int_0^6 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{r^2 dx}{0,6\rho^2 \sqrt{2g}} \cdot 2\sqrt{x} \Big|_0^6 = \frac{10}{\sqrt{3g}} \cdot \frac{r^2}{\rho^2}$$

3. Подставляем исходные данные, получаем:

$$t \approx 1062 \text{ сек} = 17,7 \text{ мин}$$

Ответ: вода вытечет из резервуара через $t \approx 1062 \text{ сек} = 17,7 \text{ мин}$.

Критерии оценивания:

- построение математической модели процесса истечения воды из резервуара;
- интегрирование полученного уравнения;
- нахождение времени вытекания воды из резервуара через круглое отверстие, сделанное в дне резервуара.

Компетенции: УК-6, ОПК-1

5. Решить задачу, используя методы интегрального исчисления:

Найти массу m пластины, которая ограничена кривыми:

$$x = 2, y = 0, y^2 = \frac{x}{2}, \quad (y \geq 0)$$

и имеет поверхностную плотность, определяемую функцией $\rho(x, y) = \frac{7}{2}x^2 + 6y$.

Привести расширенное решение.

Время выполнения – 25 мин.

Ожидаемый результат:

Задача может быть решена с использованием двойного интеграла, а именно:

$$m = \iint_D \rho(x, y) dx dy$$

Область D (плоская пластина) – это фигура, ограниченная прямыми $x = 2, y = 0$ и параболой $y^2 = \frac{x}{2}, y \geq 0$. Тогда масса m равна:

$$m = \iint_D \rho(x, y) dx dy = \iint_D \left(\frac{7}{2}x^2 + 6y \right) dx dy$$

Переходя к повторному интегрированию, внешнее интегрирование проведем по переменной y . Тогда $0 \leq y \leq 1, 2y^2 \leq x \leq 2$.

$$m = \int_0^1 dy \int_{2y^2}^2 \left(\frac{7}{2}x^2 + 6y \right) dx = \int_0^1 \left(\frac{7}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + 6y \cdot x \Big|_{2y^2}^2 \right) dy =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{28}{3} - \frac{28}{3}y^6 + 12y - 12y^3 \right) dy = \frac{28}{3} - \frac{4}{3} + 6 - 3 = 11 \text{ (ед. массы)}$$

Ответ: масса пластины равна 11 (ед. массы).

Критерии оценивания:

- использование прикладных возможностей двойного интеграла;
- вычисление двойного интеграла повторным интегрированием (возможен чертеж области интегрирования);
- нахождение величины массы.

Компетенции: УК-6, ОПК-1

6. Решить задачу, используя методы дифференциального исчисления:

Найти выражение для объема реализованной продукции $y = y(t)$, если известно, что кривая спроса $p(y)$ задается уравнением $p(y) = 2 - y$, норма акселерации $1/l = 2$, норма инвестиций $m = 0,5$, $y(0) = 0,5$.

(Справочная информация: модель роста в условиях конкурентного рынка принимает вид $y' = mlp(y)y$).

Привести расширенное решение.

Время выполнения – 30 мин.

Ожидаемый результат:

Используем модель роста в условиях конкурентного рынка при заданных условиях:

$$\begin{aligned} y' &= (2 - y)y \\ \frac{dy}{(2 - y)y} &= dt \\ \int \frac{dy}{(2 - y)y} &= \int dt \\ \ln \left| \frac{y - 2}{y} \right| &= -2t + C_1 \\ \frac{y - 2}{y} &= Ce^{-2t} \end{aligned}$$

$$y(0) = 0,5 \Rightarrow C = 3$$

Окончательное решение принимает вид:

$$y = \frac{2}{1 + 3e^{-2t}}$$

Ответ: объем реализованной продукции определяется функцией:

$$y = \frac{2}{1 + 3e^{-2t}}$$

Критерии оценивания:

- адаптировать модель роста в условиях конкурентного рынка для решаемой задачи;
- найти общее решение полученного дифференциального уравнения;

– выделить частное решение, соответствующее заданным начальным условиям;

– найти функцию объема реализованной продукции.

Компетенции: УК-6, ОПК-1

Экспертное заключение

Представленный комплект оценочных материалов по дисциплине «Математический анализ» соответствует требованиям ФГОС ВО.

Предлагаемые оценочные материалы адекватны целям и задачам реализации основной профессиональной образовательной программы по направлению подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика.

Виды оценочных средств, включенные в представленный фонд, отвечают основным принципам формирования ФОС.

Разработанные и представленные для экспертизы оценочные материалы рекомендуются к использованию в процессе подготовки обучающихся по указанному направлению.

Председатель учебно-методической комиссии
института компьютерных систем и
информационных технологий



Ветрова Н. Н.

Лист изменений и дополнений

№ п/п	Виды дополнений и изменений	Дата и номер протокола заседания кафедры (кафедр), на котором были рассмотрены и одобрены изменения и дополнения	Подпись (с расшифровкой) заведующего кафедрой (заведующих кафедрами)
1.	Дополнен комплектом оценочных материалов	протокол заседания кафедры прикладной математики № <u>8</u> от <u>24.02.2025</u>	 В.В. Мальй