# Комплект оценочных материалов по дисциплине«Алгебра и геометрия»

### Задания закрытого типа

#### Задания закрытого типа на выбор правильного ответа

1. Выберите один правильный ответ

Вычислить определитель:

$$\left|\begin{matrix}4&1\\5&2\end{matrix}\right|$$

А) $9$

Б) $13$

В) $4$

Г) $3$

Правильный ответ: Г

Компетенции: УК-6, ОПК-1

2. Выберите один правильный ответ

Найти скалярное произведение $\vec{a}∙\vec{b}$ векторов:

$$\vec{a}\left(1;2;3\right); \vec{b}\left(0;2;0\right)$$

А) $4$

Б) $0$

В) $-4$

Г) $1$

Правильный ответ: А

Компетенции: УК-6, ОПК-1

3. Выберите один правильный ответ

Дано уравнение плоскости $2x+3y+z-1=0$. Определить для нее координаты вектора нормали $\vec{n}$.

А) $\vec{n}\left(2, 3,-1\right)$

Б) $\vec{n}\left(3,-2,-1\right)$

В) $\vec{n}\left(2, 3, 1\right)$

Г)$\vec{n}\left(-2, 3, 1\right)$

Правильный ответ: В

Компетенции: УК-6, ОПК-1

4. Выберите один правильный ответ

Дано каноническое уравнение эллипса:

$$\frac{х^{2}}{4}+\frac{у^{2}}{9}=1.$$

Определить полуоси $a, b$ эллипса.

А) $a=1, b=1$

Б) $a=2, b=3$

В) $a=4, b=9$

Г) $a=3, b=2$

Правильный ответ: Б

Компетенции: УК-6, ОПК-1

#### Задания закрытого типа на установление соответствия

1. Установите правильное соответствие. Каждому элементу левого столбца соответствует только один элемент правого столбца.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | Уравнение |  | Поверхность 2-го порядка |
| 1) | $$x^{2}+y^{2}+z^{2}=R^{2}$$ | А) | эллипсоид |
| 2) | $$x^{2}+y^{2}=R^{2}$$ | Б) | цилиндр |
| 3) | $$\frac{x^{2}}{a^{2}}+\frac{y^{2}}{b^{2}}+\frac{z^{2}}{c^{2}}=1$$ | В) | конус |
| 4) | $$\frac{x^{2}}{a^{2}}+\frac{y^{2}}{b^{2}}-\frac{z^{2}}{c^{2}}=0$$ | Г) | сфера |

Правильный ответ:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| Г | Б | А | В |

Компетенции: УК-6, ОПК-1

2. Установите правильное соответствие. Каждому элементу левого столбца соответствует только один элемент правого столбца.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | Матрица |  | Ранг матрицы |
| 1) | $$\left(\begin{matrix}1&2\\2&4\end{matrix}\right)$$ | А) | $$2$$ |
| 2) | $$\left(\begin{matrix}1&2\\2&5\end{matrix}\right)$$ | Б) | $$1$$ |
| 3) | $$\left(\begin{matrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{matrix}\right)$$ | В) | $$3$$ |
| 4) | $$\left(\begin{matrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{matrix}\right)$$ | Г) | $$0$$ |

Правильный ответ:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| Б | А | В | Г |

Компетенции: УК-6, ОПК-1

3. Установите правильное соответствие. Каждому элементу левого столбца соответствует только один элемент правого столбца.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | Способы задания прямой на плоскости |  | Уравнения прямой на плоскости |
| 1) | по двум точкам | А) | $$A\left(x-x\_{0}\right)+B\left(y-y\_{0}\right)=0$$ |
| 2) | по точке и направляющему вектору | Б) | $$\frac{x-x\_{1}}{x\_{2}-x\_{1}}=\frac{y-y\_{1}}{y\_{2}-y\_{1}}$$ |
| 3) | по точке и вектору нормали | В) | $$y-y\_{0}=k\left(x-x\_{0}\right)$$ |
| 4) | по точке и угловому коэффициенту | Г) | $$\frac{x-x\_{0}}{a\_{1}}=\frac{y-y\_{0}}{a\_{2}}$$ |

Правильный ответ:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| Б | Г | А | В |

Компетенции: УК-6, ОПК-1

4. Установите правильное соответствие. Каждому элементу левого столбца соответствует только один элемент правого столбца.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | Произведение матриц |  | Размерность результата |
| 1) | $$\left(\begin{matrix}5&0 \\4&1 \\3&1 \end{matrix}\begin{matrix}2&2\\ 5&3\\ 1&7\end{matrix}\right)∙\left(\begin{array}{c}6\\-2\\7\\4\end{array}\right)$$ | А) | $$3×3$$ |
| 2) | $$\left(\begin{matrix}1&-2&3\\6&5&7\end{matrix}\right)∙\left(\begin{matrix}-2&3&-1\\0&8&4\end{matrix}\right)$$ | Б) | $$1×1$$ |
| 3) | $$\left(\begin{matrix}4&0&-2 \end{matrix}\begin{matrix}3&1\end{matrix}\right)∙\left(\begin{array}{c}3\\1\\-1\\5\\2\end{array}\right)$$ | В) | не существует |
| 4) | $$\left(\begin{array}{c}3\\1\\-1\\5\\2\end{array}\right)∙\left(\begin{matrix}4&0&-2 \end{matrix}\begin{matrix}3&1\end{matrix}\right)$$ | Г) | $$3×1$$ |
| 5) | $$\left(\begin{matrix}-3&2&1\\3&-4&-7\\0&3&5\end{matrix}\right)∙\left(\begin{matrix}2&5&61\\1&4&3\\0&1&5\end{matrix}\right)$$ | Д) | $$5×5$$ |

Правильный ответ:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| Г | В | Б | Д | А |

Компетенции: УК-6, ОПК-1

#### Задания закрытого типа на установление правильной последовательности

1. Расположите определители в порядке убывания их величины:

А) $\left|\begin{matrix}1&2&3\\1&2&3\\3&2&2\end{matrix}\right|$

Б) $\left|\begin{matrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{matrix}\right|$

В) $\left|\begin{matrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{matrix}\right|$

Г) $\left|\begin{matrix}1&2&3\\0&2&1\\0&0&3\end{matrix}\right|$

Правильный ответ: Г, Б, А, В

Компетенции: УК-6, ОПК-1

2. Расположите векторы в порядке возрастания их длины:

А) $\left(1;0;0\right)$

Б) $\left(1;1;1\right)$

В) $(3;4)$

Г) $\left(10;0\right)$

Правильный ответ: А, Б, В, Г

Компетенции: УК-6, ОПК-1

3. Расположите пары векторов $\vec{a},\vec{b}$ в порядке убывания величины$|\vec{a}×\vec{b}|$модуляих векторного произведения:

А) $\vec{a}\left(1;2;3\right); \vec{b}\left(-1;0;0\right)$

Б) $\vec{a}\left(1;2;3\right); \vec{b}\left(1;2;3\right)$

В) $\vec{a}\left(1;0;0\right); \vec{b}\left(0;1;0\right)$

Г) $\vec{a}\left(1;0;1\right); \vec{b}\left(0;1;0\right)$

Правильный ответ: А, Г, В, Б

Компетенции: УК-6, ОПК-1

4. Расположите величины объемов параллелепипедов, построенных на векторах $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, в порядке возрастания:

А) $\vec{a}\left(\begin{matrix}1,&0,&0\end{matrix}\right), \vec{b}\left(\begin{matrix}0,&1,&0\end{matrix}\right),\vec{ c}\left(\begin{matrix}0,&0,&1\end{matrix}\right)$

Б) $\vec{a}\left(\begin{matrix}1,&0,&0\end{matrix}\right), \vec{b}\left(\begin{matrix}0,&6,&8\end{matrix}\right), \vec{ c}\left(\begin{matrix}3,&0,&4\end{matrix}\right)$

В) $\vec{a}\left(\begin{matrix}1,&0,&0\end{matrix}\right), \vec{b}\left(\begin{matrix}6,&8,&0\end{matrix}\right), \vec{ c}\left(\begin{matrix}0,&3,&4\end{matrix}\right)$

Г) $\vec{a}\left(\begin{matrix}1,&0,&1\end{matrix}\right), \vec{b}\left(1\begin{matrix}0,&0,&1\end{matrix}\right), \vec{ c}\left(\begin{matrix}-10,&0,&1\end{matrix}\right)$

Правильный ответ: Г, А, Б, В

Компетенции: УК-6, ОПК-1

### Задания открытого типа

#### Задания открытого типа на дополнение

1. Напишите пропущенное слово (словосочетание).

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ двух ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – это число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними.

Правильный ответ: скалярное произведение.

Компетенции: УК-6, ОПК-1

2. Напишите пропущенное слово (словосочетание).

Система линейных алгебраических уравнений \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ тогда и только тогда, когда ранг основной матрицы равен рангу расширенной матрицы системы.

Правильный ответ: совместна.

Компетенции: УК-6, ОПК-1

3. Напишите пропущенное слово (словосочетание).

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ – это геометрическое место точек, сумма расстояний от которых до двух фиксированных точек $F\_{1}$ и $F\_{2}$, называемых фокусами, есть величина постоянная.

Правильный ответ: эллипс.

Компетенции: УК-6, ОПК-1

4. Напишите пропущенное слово (словосочетание).

Векторы $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ являются компланарными тогда и только тогда, когда их \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ равно нулю.

Правильный ответ: смешанное произведение.

Компетенции: УК-6, ОПК-1

5. Напишите пропущенное слово (словосочетание).

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ – это геометрическое место точек, равноудаленных от данной прямой (директрисы) и данной точки (фокуса).

Правильный ответ: парабола.

Компетенции: УК-6, ОПК-1

#### Задания открытого типа с кратким свободным ответом

1. Найти расстояние от точки $M\left(3,-3, 4\right)⁡$ до плоскости, заданной уравнением $x-2y+2z+1=0.$ *(Ответ запишите в виде числа)*

Правильный ответ: $6$.

Компетенции: УК-6, ОПК-1

2. Определить тип кривой второго порядка, заданной уравнением $x^{2}-10x+y^{2}+2y-74=0.$ *(Ответ запишите одним словом)*

Правильный ответ: окружность.

Компетенции: УК-6, ОПК-1

3. Найти площадь треугольника, заданного координатами своих вершин $A\left(0;0;0\right)$, $B\left(1;0;0\right)$, $C\left(0;2;0\right)$ *(Ответ запишите в виде числа)*

Правильный ответ: $1$.

Компетенции: УК-6, ОПК-1

4. Найти значение $δ$, при котором данные плоскости перпендикулярны:

$$-x+δy+3z-1=0, $$

$$δx-2y-z+5=0.$$

*(Ответ запишите в виде числа)*

Правильный ответ: $-1$.

Компетенции: УК-6, ОПК-1

5. Решить систему линейных алгебраических уравнений:

$$\left\{\begin{array}{c}\& x\_{1}+x\_{2}+3x\_{3}=1,\\\&2x\_{1}+3x\_{2}-x\_{3}=-6,\\\&3x\_{1}-x\_{2}-2x\_{3}=-4.\end{array}\right.$$

*(Ответ запишите в виде упорядоченной тройки чисел)*

Правильный ответ: $\left(-1, -1, 1\right)$.

Компетенции: УК-6, ОПК-1

#### Задания открытого типа с развернутым ответом

1. Решить задачу, используя методы аналитической геометрии, линейной и векторной алгебры.

Найти расстояние между параллельными прямыми:

$$l\_{1}: \frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{4}=\frac{z}{2}, l\_{2}: \frac{x-7}{3}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-3}{2}$$

Привести расширенное решение.

Время выполнения – 25 мин.

Ожидаемый результат:

Анализ условия.

Из условия следует, что прямые $l\_{1}$ и $l\_{2}$ параллельны, так как они имеют один и тот же направляющий вектор $\vec{a\_{1}}=\vec{a\_{2}}=\left(\vec{3, 4, 2}\right).$ Кроме того, имеются точки: $M\_{1}\left(2,-1, 0\right)\in l\_{1}$ и $M\_{2}\left(7, 1, 3\right)\in l\_{2}.$

Анализ условия показывает, что для получения требуемого результата необходимо построить алгоритм решения, включающий в себя дополнительные построения:

А) Проведем вспомогательную плоскость $α,$ проходящую через точку $M\_{1}\left(2,-1, 0\right)$ перпендикулярно параллельным прямым $l\_{1}$ и $l\_{2}$. Тогда вектор нормали плоскости $α$ имеет координаты $\vec{n}\left(3, 4, 2\right)$.

Тогда имеем уравнение плоскости $α$:

$A\left(x-x\_{0}\right)+B\left(y-y\_{0}\right)+C\left(z-z\_{0}\right)=0$;

$3\left(x-2\right)+4\left(y+1\right)+2\left(z-0\right)=0$;

$α:3x+4y+2z-2=0$.

Б) Находим точку $M\_{3}$ пересечения построенной плоскости $α$ и второй прямой $l\_{2}.$ Для этого построим и решим систему, состоящую из уравнений:

$$\left\{\begin{array}{c}3x+4y+2z-2=0\\\frac{x-7}{3}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-3}{2}\end{array}\right.$$

Переходя от канонического уравнения прямой к параметрическим уравнениям, получаем:

$$\left\{\begin{array}{c}3x+4y+2z-2=0\\x=3t+7\\y=4t+1\\z=2t+3\end{array}\right.$$

Подставляя параметрические уравнения прямой $l\_{2}$ в общее уравнение плоскости $α$, находим значение параметра $t$:

$$3\left(3t+7\right)+4\left(4t+1\right)+2\left(2t+3\right)-2=0,$$

$$9t+21+16t+4+4t+6-2=0,$$

$$29t=-29,$$

$$t=-1.$$

В) Полученное значение параметра $t$ соответствует точке $M\_{3}=α∩l\_{2}$. Находим координаты точки $M\_{3}$, возвращая значение параметра $t=-1$ в параметрические уравнения:

$$\left\{\begin{array}{c}\&x=3∙\left(-1\right)+7=4\\\&y=4∙\left(-1\right)+1=-3\\\&z=2∙\left(-1\right)+3=1\end{array}\right.$$

Таким образом, имеем точку $M\_{3}\left(4,-3, 1\right)$.

Г) Исходя из построений, точки $M\_{1}$ и $M\_{3}$ являются основаниями общего перпендикуляра, проведенного к прямым $l\_{1}$ и $l\_{2}$. Поэтому, расстояние между этими прямыми равно длине отрезка $M\_{1}M\_{3}$:

$$d\left(l\_{1},l\_{2} \right)=\left|M\_{1}M\_{3}\right|=\sqrt{\left(2-4\right)^{2}+\left(-1+3\right)^{2}+\left(0-1\right)^{2}}=\sqrt{9}=3.$$

Ответ: расстояние между параллельными прямыми $d=3$.

Критерии оценивания:

– введение в рассмотрение дополнительных геометрических объектов, а именно перпендикулярной вспомогательной плоскости;

– построение уравнения вспомогательной плоскости;

– нахождение точки пересечения вспомогательной плоскости с одной из прямых;

– решение системы соответствующих уравнений;

– обоснование результата.

Компетенции: УК-6, ОПК-1

2. Решить задачу, используя методы линейной алгебры.

В таблице приведены данные об исполнении баланса за отчетный период в условных денежных единицах.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Отрасль | Потребление | Конечный продукт | Валовой продукт |
| Энерге-тика | Машино-строение |
| Производство | Энергетика | 5 | 15 | 65 | 100 |
| Машиностроение | 11 | 9 | 104 | 150 |

Вычислить необходимый объем валового выпуска каждой отрасли, если конечное потребление энергетической отрасли увеличится на 56,19 условных единиц, а машиностроения – на 79,14 условных единиц.

Привести расширенное решение.

Время выполнения – 30 мин.

Ожидаемый результат:

1. Анализ условия.

Имеем вектор валовой продукции:

$Х=\left(\begin{matrix}100\\150\end{matrix}\right)$, то есть $х\_{1}=100, х\_{2}=150.$

Матрица объемов товаров и услуг:

$\left(\begin{matrix}5&15\\11&9\end{matrix}\right)$, то есть $b\_{11}=5, b\_{12}=15, b\_{21}=11, b\_{22}=9.$

Вектор конечной продукции имеет вид:

$У=\left(\begin{matrix}65\\104\end{matrix}\right)$, то есть $у\_{1}=65, у\_{2}=104.$

2. Находим коэффициенты матрицы прямых затрат по формуле:

$$a\_{ij}=\frac{b\_{ij}}{x\_{j}}, \left(i, j=1,2\right)$$

Тогда имеем:

$$a\_{11}=\frac{b\_{11}}{x\_{1}}=\frac{5}{100}=0,05; a\_{12}=\frac{b\_{12}}{x\_{2}}=\frac{15}{150}=0,1$$

$$a\_{21}=\frac{b\_{21}}{x\_{1}}=\frac{11}{100}=0,11; a\_{22}=\frac{b\_{22}}{x\_{2}}=\frac{9}{150}=0,06.$$

Таким образом, матрица прямых затрат имеет вид:

$$А=\left(\begin{matrix}0,05&0,1\\0,11&0,06\end{matrix}\right)$$

3. Анализ продуктивности матрицы прямых затрат.

Матрица прямых затрат $А$ имеет неотрицательные элементы. Для того, чтобы определить, является ли матрица $А$ продуктивной, используем первый критерий продуктивности. Для этого находим матрицу полных затрат:

$$S=\left(E-A\right)^{-1}$$

Получаем:

$B=E-A=\left(\begin{matrix}0,95&-0,1\\-0,11&0,94\end{matrix}\right)$; $∆\_{В}=0,882.$

Тогда имеем:

$$S=\frac{1}{0,882} \left(\begin{matrix}0,94&0,11\\0,1&0,95\end{matrix}\right)$$

Матрица $S$ – неотрицательная матрица, следовательно, матрица $А$ прямых затрат является продуктивной.

4. Нахождение вектора валового выпуска с учетом изменений.

Вектор $У$ конечного продукта должен измениться. По условию $у\_{1}$ должен увеличиться на 56,19 условных единиц, а $у\_{2}$ – на 79,14 условных единиц.

Тогда измененный вектор конечной продукции примет вид:

$$У\_{1}=\left(\begin{matrix}121,19\\183,14\end{matrix}\right)$$

Тогда новый вектор валового выпуска находится по формуле:

$$Х\_{1}=\left(E-A\right)^{-1}∙У\_{1}$$

$$Х\_{1}=\frac{1}{0,882} \left(\begin{matrix}0,94&0,11\\0,1&0,95\end{matrix}\right) \left(\begin{matrix}121,19\\183,14\end{matrix}\right)=\frac{1}{0,882} \left(\begin{matrix}113,9186+20,1454\\12,119+173,983\end{matrix}\right)$$

$$Х\_{1}=\frac{1}{0,882} \left(\begin{matrix}134,064\\186,102\end{matrix}\right)=\left(\begin{matrix}152\\211\end{matrix}\right)$$

Таким образом, искомый вектор валового выпуска $\left(\begin{matrix}152\\211\end{matrix}\right)$.

Ответ: валовый выпуск в энергетической отрасли нужно увеличить до 152 условных единиц, а в машиностроительной – до 211 условных единиц.

Критерии оценивания:

– использование средств матричного исчисления для моделирования и решения прикладных экономических задач;

– корректно выполненные операции над матрицами;

– корректные выводы.

Компетенции: УК-6, ОПК-1