

**Комплект оценочных материалов по дисциплине
«Функциональный анализ»**

Задания закрытого типа

Задания закрытого типа на выбор правильного ответа

1. Выберите один правильный ответ

Функции заданы на числовой прямой. Какие из них удовлетворяют аксиомам метрики?

А) $\rho(x, y) = |x - y|$;

Б) $\rho(x, y) = |x^3 - y^3|$;

В) $\rho(x, y) = |\arctg x - \arctg y|$;

Правильный ответ: А

Компетенции: ОПК-1, ОПК-2

2. Выберите один правильный ответ

Расстояние между функциями $f(x) = x^2 + 5$ и $g(x) = 4x$ в пространстве $C[-1; 3]$ равно:

А) 10;

Б) 4;

В) 2;

Правильный ответ: А

Компетенции: ОПК-1, ОПК-2

3. Выберите один правильный ответ

Расстояние между функциями $f(x) = x^3$ и $g(x) = 3x + 4$ в пространстве $C[0; 2]$ равно:

А) 4

Б) 6

В) 5

Правильный ответ: Б

Компетенции: ОПК-1, ОПК-2

4. Выберите один правильный ответ

Укажите правильное определение метрики в нормированном пространстве

А) $\rho(x, y) = \|x\| - \|y\|$

Б) $\rho(x, y) = \|x + y\|$

В) $\rho(x, y) = \|x - y\|$

Правильный ответ: В

Компетенции: ОПК-1, ОПК-2

5. Выберите один правильный ответ

Укажите правильное определение нормы в евклидовом пространстве.

А) $\|x\| = (x, x)$

Б) $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$

В) $\|x\| = \sqrt{x}$

Правильный ответ: Б

Компетенции: ОПК-1, ОПК-2

6. Выберите один правильный ответ

Для линейного функционала f множество $\{x \mid f(x) = 0\}$ является

А) образом

Б) фактор-пространством

В) ядром

Правильный ответ: В

Компетенции: ОПК-1, ОПК-2

7. Выберите один правильный ответ

Пусть $x, y \in l^2$. Угол между $x = (2, 0, -1, 0, 0, \dots)$ и $y = (0, 3, 0, 1, 0, 0, \dots)$ равен

А) $\pi/4$

Б) $2\pi/3$

В) $\pi/2$

Правильный ответ: В

Компетенции: ОПК-1, ОПК-2

8. Выберите один правильный ответ

Пусть $x(t), y(t) \in L^2[-1; 1]$. Угол между $x(t) = t$ и $y(t) = \cos \frac{\pi t}{2}$ равен

А) $\pi/4$

Б) $\pi/2$

В) 0

Правильный ответ: Б

Компетенции: ОПК-1, ОПК-2

9. Выберите все правильные варианты ответов

Укажите множества, которые образуют в пространстве $C[-1, 1]$ замкнутые подпространства.

А). монотонные функции

Б) четные функции

В) многочлены

Г) многочлены степени не выше n , дополненные нулевым многочленом

Правильный ответ: Б, Г,

Компетенции: ОПК-1, ОПК-2

10. Выберите все правильные варианты ответов

Укажите те подмножества числовой прямой, которые всегда измеримы по Лебегу

А) открытые

Б) ограниченные

В) несчетные

Г) замкнутые

Правильный ответ: А, Г

Компетенции: ОПК-1, ОПК-2

11. Выберите все правильные варианты ответов

А) в сепарабельном евклидовом пространстве существует ортонормированный базис

Б) ряд Фурье любого элемента всегда сходится к этому же элементу

В) для любой ортонормированной системы всегда справедливо неравенство Бесселя

Г) для любой ортонормированной системы всегда справедливо равенство Парсеваля

Правильный ответ: А, В.

Компетенции: ОПК-1, ОПК-2

Задания закрытого типа на установление соответствия

1. Установите правильное соответствие. Каждому элементу левого столбца соответствует только один элемент правого столбца.

1)	$x(t) \in C[a; b]$	А)	$\ x\ = \left(\int_a^b x^2(t) dt \right)^{\frac{1}{2}}$
2)	$x(t) \in L^2[a; b]$	Б)	$\ x\ = \max_{t \in [a; b]} x(t) $

3)	$x \in l^2$	В)	$\ x\ = \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2$
----	-------------	----	-------------------------------------

Правильный ответ:

1	2	3
Б	А	В

Компетенции: ОПК-1, ОПК-2

2. Установите правильное соответствие. Каждому элементу левого столбца соответствует только один элемент правого столбца.

1)	Интегральное уравнение Фредгольма второго рода	А)	$f(x) = \int_a^x K(x;t)f(t)dt + \varphi(x)$
2)	Интегральное уравнение Фредгольма с вырожденным ядром	Б)	$f(x) = \lambda \int_a^b K(x;t)f(t)dt + \varphi(x)$
3)	Интегральное уравнение Вольтера второго рода	В)	$f(x) = \lambda \int_a^b f(t) \sum_{i=1}^n a_i(x)b_i(t)dt + \varphi(x)$

Правильный ответ:

1	2	3
Б	В	А

Компетенции: ОПК-1, ОПК-2

3. Установите правильное соответствие. Каждому элементу левого столбца соответствует только один элемент правого столбца.

1)	Семейство вещественных функций $f_\alpha : X \rightarrow \mathbb{R}$, где A - некоторое множество индексов, X - произвольное множество, равномерно ограничено	А)	$\forall \varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любой функции $f \in G$ и любых точек $x_1, x_2 \in [a, b]$ из условия $ x_1 - x_2 < \delta$ следует условие $ f(x_1) - f(x_2) < \varepsilon$.
2)	Множество $G \subset C[a; b]$ равномерно непрерывно	Б)	В любом покрытии G открытыми множествами найдётся конечное <u>подпокрытие</u> .
3)	Множество $G \subset C[a; b]$ предкомпактно	В)	$\exists C > 0 \forall \alpha \in A \forall x \in X f_\alpha(x) \leq C$.

Правильный ответ:

1	2	3
В	А	Б

Компетенции: ОПК-1, ОПК-2

Задания закрытого типа на установление правильной последовательности

1. Рассматриваются следующие пространства:

А) гильбертово пространство

Б) банахово пространство

В) метрическое пространство

Расположить в порядке убывания общности

Правильный ответ: В, Б, А,

Компетенции: ОПК-1, ОПК-2

2. Рассматривается функция $f(x)$, $x \in [a; b]$, обладающая свойством:

А) $f(x)$ непрерывна на $[a; b]$;

Б) $f(x)$ равномерно непрерывна на $[a; b]$;

В) $f(x)$ непрерывно дифференцируема на $[a; b]$.

Расположить в порядке убывания общности

Правильный ответ: А, В, Б,

Компетенции: ОПК-1, ОПК-2

Задания открытого типа

Задания открытого типа на дополнение

1. Напишите пропущенное слово (словосочетание).

Гильбертово пространство – это евклидово пространство _____, относительно нормы, порожденной скалярным произведением.

Правильный ответ: полное

Компетенции: ОПК-1, ОПК-2

2. Напишите пропущенное слово (словосочетание).

Пространство всех непрерывных линейных функционалов над нормированным пространством называется _____

Правильный ответ: сопряженным пространством

Компетенции: ОПК-1, ОПК-2

3. Напишите пропущенное слово (словосочетание).

_____ пространство – это полное нормированное пространство.

Правильный ответ: Банахово

Компетенции: ОПК-1, ОПК-2

4. Напишите пропущенное слово (словосочетание).

Линейный оператор ограничен тогда и только тогда, когда он _____

Правильный ответ: непрерывен

Компетенции: ОПК-1, ОПК-2

5. Напишите пропущенное слово (словосочетание).

Кольцо множеств с единицей называется _____

Правильный ответ: алгеброй множеств

Компетенции: ОПК-1, ОПК-2

6. Напишите пропущенное слово (словосочетание).

Измеримая функция, множество значений которой не более чем счетно называется _____

Правильный ответ: простой функцией

Компетенции: ОПК-1, ОПК-2

Задания открытого типа с кратким свободным ответом

1. Найти норму элемента $y = \frac{1}{5}(4x^3 - x^4)$ в $C[-1; 5]$.

Правильный ответ: 25.

Компетенции: ОПК-1, ОПК-2

2. Найти неподвижную точку отображения $f(x) = x^3 - 3x$ числовой прямой в себя.

Правильный ответ: -2 .

Компетенции: ОПК-1, ОПК-2

3. Линейный функционал, определенный в пространстве $\square^2$, в точках $(1,1)$ и $(1,0)$ принимает значение 2 и 5 соответственно. Найдите его значение в точке $(3,4)$.

Правильный ответ: 3.

Компетенции: ОПК-1, ОПК-2

4. Найти неподвижную точку отображения $f(y) = y^2(x) - y(x) - x^2$, пространства $C[0,1]$ в себя.

Правильный ответ: $y = 1 \pm \sqrt{1 + x^2}$.

Компетенции

5. Найти норму линейного функционала $f(x) = \int_0^{\pi} x(t) \sin t dt$, $x(t) \in L^2[0; \pi]$

Правильный ответ $\sqrt{\pi/2}$

Компетенции: ОПК-1, ОПК-2

6. Найти норму элемента $(3; -5; -3)$ в пространстве $\square^3$

Правильный ответ: $\sqrt{43}$.

Компетенции: ОПК-1, ОПК-2

Задания открытого типа с развернутым ответом

1. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) - \lambda \int_{-\pi}^{\pi} (x \cos t + t^2 \sin t + \cos x \sin t) \varphi(t) dt = x.$$

Привести расширенное решение.

Время выполнения – 30 мин.

Ожидаемый результат: Данное уравнение является уравнением Фредгольма второго рода с вырожденным ядром. Запишем его в следующем виде:

$$\varphi(x) = \lambda x \int_{-\pi}^{\pi} \cos t \varphi(t) dt + \lambda \sin x \int_{-\pi}^{\pi} t^2 \varphi(t) dt + \lambda \cos x \int_{-\pi}^{\pi} \sin t \varphi(t) dt + x.$$

Введем обозначения

$$C_1 = \int_{-\pi}^{\pi} \cos t \varphi(t) dt, \quad C_2 = \int_{-\pi}^{\pi} t^2 \varphi(t) dt, \quad C_3 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin t \varphi(t) dt, \quad (1)$$

где C_1, C_2, C_3 - неизвестные постоянные. Тогда исходное уравнение примет вид:

$$\varphi(x) = C_1 \lambda x + C_2 \lambda \sin x + C_3 \lambda \cos x + x. \quad (2)$$

Подставляя выражение (2) в равенства (1), получим

$$C_1 = \int_{-\pi}^{\pi} \cos t (C_1 \lambda t + C_2 \lambda \sin t + C_3 \lambda \cos t + t) dt,$$

$$C_2 = \int_{-\pi}^{\pi} t^2 (C_1 \lambda t + C_2 \lambda \sin t + C_3 \lambda \cos t + t) dt,$$

$$C_3 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin t (C_1 \lambda t + C_2 \lambda \sin t + C_3 \lambda \cos t + t) dt .$$

Или

$$\begin{aligned} C_1 \left(1 - \lambda \int_{-\pi}^{\pi} t \cos t dt \right) - C_2 \lambda \int_{-\pi}^{\pi} \cos t \sin t dt - C_3 \lambda \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 t dt &= \int_{-\pi}^{\pi} t \cos t dt , \\ -C_1 \lambda \int_{-\pi}^{\pi} t^3 dt + C_2 \left(1 - \lambda \int_{-\pi}^{\pi} t^2 \sin t dt \right) - C_3 \lambda \int_{-\pi}^{\pi} t^2 \cos t dt &= \int_{-\pi}^{\pi} t^3 dt , \\ -C_1 \lambda \int_{-\pi}^{\pi} t \sin t dt - C_2 \lambda \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 t dt + C_3 \left(1 - \lambda \int_{-\pi}^{\pi} \cos t \sin t dt \right) &= \int_{-\pi}^{\pi} t \sin t dt . \end{aligned}$$

Вычисляя входящие в эти уравнения интегралы, мы получим систему алгебраических уравнений для нахождения неизвестных C_1, C_2, C_3 :

$$\begin{cases} C_1 - \lambda \pi C_3 = 0 \\ C_2 + 4\lambda \pi C_3 = 0 \\ -2\lambda \pi C_1 - \lambda \pi C_2 + C_3 = 2\pi \end{cases}$$

Определитель этой системы

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -\pi\lambda \\ 0 & 1 & 4\pi\lambda \\ -2\pi\lambda & -\pi\lambda & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2\pi^2 \lambda^2 \neq 0$$

Система имеет единственное решение

$$C_1 = \frac{2\lambda\pi^2}{1 + 2\lambda^2\pi^2}; \quad C_2 = \frac{8\lambda\pi^2}{1 + 2\lambda^2\pi^2}; \quad C_3 = \frac{2\pi}{1 + 2\lambda^2\pi^2} .$$

Подставляя найденные значения C_1, C_2, C_3 в (2) получим решение данного интегрального уравнения:

$$\varphi(x) = \frac{2\lambda\pi}{1 + 2\lambda^2\pi^2} (\lambda\pi x - 4\lambda\pi \sin x + \cos x) + x$$

$$\text{Ответ: } \varphi(x) = \frac{2\lambda\pi}{1 + 2\lambda^2\pi^2} (\lambda\pi x - 4\lambda\pi \sin x + \cos x) + x .$$

Критерии оценивания:

– интегральные уравнения Фредгольма, вырожденное ядро, единственность решения системы линейных уравнений.

Компетенции: ОПК-1, ОПК-2

2. Доказать что для того чтобы элемент x гильбертова пространства H был ортогонален подпространству $L \subset H$, необходимо и достаточно чтобы для любого элемента $y \in L$ имело место неравенство $\|x\| \leq \|x - y\|$.

Привести расширенное решение.

Время выполнения – 30 мин.

Ожидаемый результат:

Необходимость. Поскольку $\forall x \perp L$, то для всякого $y \in L$ имеем

$$\|x - y\|^2 = (x - y, x - y) = (x, x) - (x, y) - (y, x) + (y, y) = \|x\|^2 + \|y\|^2 \geq \|x\|^2,$$

Откуда следует требуемое утверждение.

Достаточность. Для всякого $x \in H$ имеем разложение $x = y + z$, $y \in L$, $z \perp L$. По условию $\|x\| \leq \|x - y\|$, $y \in L$. Покажем, что $y = 0$. Имеем $\|y + z\| \leq \|y + z - h\|$ для всякого $h \in L$. Тогда для $h = y$ получаем $\|h + z\| \leq \|z\|$, т.е. $(h + z, h + z) \leq (z, z)$. Поскольку $z \perp L$, то из предыдущего неравенства следует $(h, h) + (z, z) \leq (z, z)$. Значит, $(h, h) = 0$, что дает $h = 0$, а, значит, и $y = 0$, что завершает доказательство.

Критерии оценивания:

– ортогональность элемента гильбертова пространства подпространству,
свойства скалярного произведения

Компетенции: ОПК-1, ОПК-2

Экспертное заключение

Представленный комплект оценочных материалов по дисциплине «Функциональный анализ» соответствует требованиям ФГОС ВО.

Предлагаемые оценочные материалы адекватны целям и задачам реализации основной профессиональной образовательной программы по направлению подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика.

Виды оценочных средств, включенные в представленный фонд, отвечают основным принципам формирования ФОС.

Разработанные и представленные для экспертизы оценочные материалы рекомендуются к использованию в процессе подготовки обучающихся по указанному направлению.

Председатель учебно-методической комиссии
института компьютерных систем и
информационных технологий

Ветрова Н. Н.

Лист изменений и дополнений

№ п/п	Виды дополнений и изменений	Дата и номер протокола заседания кафедры (кафедр), на котором были рассмотрены и одобрены изменения и дополнения	Подпись (с расшифровкой) заведующего кафедрой (заведующих кафедрами)
1.	Дополнен комплектом оценочных материалов	протокол заседания кафедры прикладной математики № <u>8</u> от <u>24.02.2025</u>	 В.В. Малый