

**Комплект оценочных материалов по дисциплине
«Теория функций комплексного переменного»**

Задания закрытого типа

Задания закрытого типа на выбор правильного ответа

1. Выберите один правильный ответ

Найти аналитическую функцию $w = u(x, y) + v(x, y)$ по известной действительной части

$u = x^2 - y^2 + 2x$ и дополнительному условию $w(i) = 2i - 1$.

А) $z - 2$

Б) $2z^2 + 2z$

В) $z - 2z^2$

Г) $z^2 + 2z$

Правильный ответ: Г

Компетенции: ОПК-1

2. Выберите один правильный ответ

Разложить в ряд Тейлора по степеням z функцию $f(z) = \frac{1}{2z - 5}$.

А) $-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n z^n}{5^{n+1}}$

Б) $-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+1} z^n}{5^n}$

В) $-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{5^{n+1} z^n}$

Г) $-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^{n+1}}{2^n z^n}$

Правильный ответ: А

Компетенции: ОПК-1

3. Выберите один правильный ответ

Найти вычет функции $f(z) = \frac{z^2}{(z - 2)^3}$ в точке $z = 2$.

А) $-\pi$

Б) i

В) 1

Г) 0

Правильный ответ: В

Компетенции: ОПК-1

4. Выберите один правильный ответ

Найти функцию $f(z)$, отображающую треугольник с вершинами $\{0;1;i\}$, в подобный ему треугольник $\{0;2;1+i\}$.

А) $(1+i)(1-z)$

Б) $1+z$

В) $\frac{1+i}{1-z}$

Г) $z+i$

Правильный ответ: А

Компетенции: ОПК-1

Задания закрытого типа на установление соответствия

1. Установите правильное соответствие. Каждому элементу левого столбца соответствует только один элемент правого столбца.

	Вычислить		Ответ
1)	$ 1+i $	А)	3
2)	$ 3i $	Б)	$\sqrt{2}$
3)	$ 2-3i $	В)	1
4)	$ i $	Г)	$\sqrt{13}$

Правильный ответ:

1	2	3	4
Б	А	Г	В

Компетенции: ОПК-1

2. Установите правильное соответствие. Каждому элементу левого столбца соответствует только один элемент правого столбца.

	Число		Аргумент
1)	i	А)	0
2)	1	Б)	$\frac{\pi}{2}$
3)	$1+i$	В)	$-\frac{\pi}{4}$
4)	$1-i$	Г)	$\frac{\pi}{4}$

Правильный ответ:

1	2	3	4
Б	А	Г	В

Компетенции: ОПК-1

3. Установите правильное соответствие. Каждому элементу левого столбца соответствует только один элемент правого столбца.

	$f(z)$		$f'(z)$
1)	$\cos z^2$	А)	$-\frac{1}{z^2}$
2)	$\frac{1}{z}$	Б)	$\frac{1}{z+1}$
3)	$\ln(1+z)$	В)	0
4)	e^{π}	Г)	$-2z \sin z^2$

Правильный ответ:

1	2	3	4
Г	А	Б	В

Компетенции: ОПК-1

4. Установите правильное соответствие. Каждому элементу левого столбца соответствует только один элемент правого столбца.

	Функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$		Действительная часть функции $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$
1)	z^2	А)	$e^{-x} \cos y$
2)	$z+1$	Б)	$\frac{(e^y + e^{-y}) \cos x}{2}$
3)	e^{-z}	В)	$x+1$
4)	$\cos z$	Г)	$x^2 - y^2$

Правильный ответ:

1	2	3	4
Г	В	А	Б

Компетенции: ОПК-1

Задания закрытого типа на установление правильной последовательности

1. Расположите модули комплексных чисел $z = x + iy$ в порядке возрастания:

А) $|i+3|$

Б) $|e^{i\pi}|$

В) $|i^2+1|$

Г) $\left|\frac{i}{2}\right|$

Правильный ответ: В, Г, Б, А
Компетенции: ОПК-1

2. Расположите комплексные числа $z = x + iy$ в порядке возрастания главных значений их аргументов:

- А) -1
- Б) i^3
- В) $1 + i$
- Г) $-2 - 2i$

Правильный ответ: В, А, Г, Б
Компетенции: ОПК-1

3. Расположите функции $w = f(z)$ в порядке убывания их коэффициентов растяжения в точке $z = i$:

- А) $z^2 + 1$
- Б) $2e^{-\pi z}$
- В) $z - 1$
- Г) $\ln(2z + 1)$

Правильный ответ: Б, А, В, Г
Компетенции: ОПК-1

4. Расположите функции $w = f(z)$ в порядке возрастания числа их полюсов с учетом кратности:

- А) $\frac{z+1}{z-2}$
- Б) $\frac{\sin z^2}{z}$
- В) $\frac{e^{-z}}{(z^2+1)^2}$
- Г) $\frac{z^2+zi}{(z+i)^4}$

Правильный ответ: Б, А, Г, В
Компетенции: ОПК-1

Задания открытого типа

Задания открытого типа на дополнение

1. Напишите пропущенное слово (словосочетание).

_____ – это преобразование, устанавливающее взаимно однозначное соответствие между точками сферы Римана и расширенной комплексной плоскостью.

Правильный ответ: стереографическая проекция.

Компетенции: ОПК-1

2. Напишите пропущенное слово (словосочетание).

_____ точки z_0 комплексной плоскости – это множество точек z , удовлетворяющих неравенству $|z - z_0| < \delta$, где δ – заданное положительное число.

Правильный ответ: окрестность $C(\delta, z_0)$.

Компетенции: ОПК-1

3. Напишите пропущенное слово (словосочетание).

Точка z_0 называется _____ точкой множества E , если существует такое $\delta > 0$, что пересечение $E \cap C(\delta, z_0)$ состоит из единственной точки z_0 .

Правильный ответ: изолированной.

Компетенции: ОПК-1

4. Напишите пропущенное слово (словосочетание).

Говорят, что в неизолированной точке $z_0 \in E$ функция $f(z)$ _____, если $f(z_0) \neq \infty$ и $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$, $z \in E$.

Правильный ответ: непрерывна.

Компетенции: ОПК-1

5. Напишите пропущенное слово (словосочетание).

Функция $f(z)$, имеющая производную в точке $z \in D$, называется _____ в этой точке.

Правильный ответ: моногенной.

Компетенции: ОПК-1

Задания открытого типа с кратким свободным ответом

1. Производная функция $e^{\sin z^3}$ равна ... (Ответ запишите в виде функции)

Правильный ответ: $3z^2 \cos z^3 e^{\sin z^3}$

Компетенции: ОПК-1

2. Найти точки дифференцируемости функции $f(z) = \bar{z}$ (Ответ запишите в виде интервала)

Правильный ответ: $\{0\}$

Компетенции: ОПК-1

3. Найти круг сходимости ряда $\sum_0^{\infty} \frac{(z-1)^n}{n^2+1}$ (Ответ запишите в виде неравенства)

Правильный ответ: $|z-1| < 1$.

Компетенции: ОПК-1

4. Найти решение уравнения $z^2 + |z|^2 = 0$. (Ответ запишите в виде комплексного числа)

Правильный ответ: $z = iy, -\infty < y < +\infty$.

Компетенции: ОПК-1

5. Найти сумму числа нулей и полюсов функции $f(z) = \frac{z^3 + 2z^2 + z}{(z-2)(z+i)^4}$ с учетом кратности. (Ответ запишите в виде числа)

Правильный ответ: 8.

Компетенции: ОПК-1

Задания открытого типа с развернутым ответом

1. Решить задачу, используя формализм теории вычетов:

Вычислить интеграл $\oint_{|z-i|=1} \frac{e^z dz}{z^4 + 2z^2 + 1}$.

Указание. Если $f(z)$ – аналитическая в области D функция за исключением конечного числа точек $a_1, \dots, a_k$ и L – замкнутый контур, охватывающий эти точки, то

$$\oint_L f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^K \operatorname{res} f(a_j) \quad (*)$$

Привести расширенное решение.

Время выполнения – 30 мин.

Ожидаемый результат:

1. Подынтегральная функция имеет две изолированных особенности в точках $z_1 = +i$ и $z_2 = -i$;

2. Подынтегральная функция имеет два полюса второго порядка в точках $z_1 = +i$ и $z_2 = -i$;

3. Только один из них $z_1 = +i$ лежит внутри контура интегрирования L ;

4. Вычет находим только в точке $z_1 = i$.

$$\operatorname{res} f(z_1) = \frac{1}{1!} \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} \left[\frac{e^z}{(z+i)^2} \right] = \lim_{z \rightarrow i} \left[\frac{e^2(z+i)^2 - 2e^z(z+i)}{(z+i)^4} \right] = \frac{e^i(1+i)}{-4};$$

тогда, на основании формулы (*), окончательно получаем

$$I = \oint_{|z|=1} e^z (z^4 + 2z^2 + 1)^{-1} dz = 2\pi i \left[-\frac{1}{4} e^i (1+i) \right] = \frac{\pi i}{2} e^i (1+C).$$

Компетенции: ОПК-1

2. Решить задачу, используя аппарат теоремы Тейлора:

Разложить в ряд Тейлора в окрестности точки $a=0$ функцию $f(z) = z \cdot (z^2 - 3z - 4)^{-1}$ и найти радиус сходимости полученного ряда.

Привести расширенное решение.

Время выполнения – 30 мин.

Критерии оценивания:

– использование метода эталонных разложений, основанный на известных разложениях часто встречающихся элементарных функций;

– использование метода восстановления бесконечно убывающей геометрической прогрессии по известной сумме ряда

$$S = \frac{a_0}{1-q} = a_0 + a_0 q + a_0 q^2 + \dots + a_0 q^n + \dots;$$

– нахождение искомого разложения и нахождение радиуса сходимости с использованием общих свойств голоморфных функций.

Ожидаемый результат:

1. Представим заданную функцию в виде суммы элементарных дробей:

$$f(z) = \frac{z}{z^2 - 3z - 4} = \frac{A}{z+1} + \frac{B}{z-4} \left\{ \begin{array}{l} z = A(z-4) + B(z-1) \\ z = 4; \Rightarrow B = \frac{4}{5} \\ z = -1; \Rightarrow A = \frac{1}{5} \end{array} \right\} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{z+1} + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{z-4}. (**)$$

2. К полученным элементарным дробям применим формулу:

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{1-(-z)} = 1 - z + z^2 - z^3 + \dots (|z| < 1)$$
$$\frac{1}{z-4} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{4}} = -\frac{1}{4} \left(1 + \frac{z}{4} + \frac{z^2}{4} + \dots \right) (|z| < 4).$$

3. Подставляем полученные разложения дробей в (**):

$$f(z) = \frac{1}{5} (1 - z + z^2 - z^3 + \dots) - \frac{1}{5} \left(1 + \frac{z}{4} + \frac{z^2}{4} + \dots \right) =$$

$$= \frac{1}{5} \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n - \sum_{n=0}^{\infty} 4^{-n} z^n \right] = \frac{1}{5} \sum_{n=0}^{\infty} [(-1)^n - 4^{-n}] z^n.$$

Ближайшей к точке $a = 0$ особой точкой заданной функции является точка $z = -1$. Поэтому радиус сходимости полученного ряда $R = 1$.

Ответ: $R = 1$.

Критерии оценивания:

- нахождение изолированных особых точек;
- классификация изолированных особых точек;
- выделение особых точек, охватываемых контуром интегрирования L ;
- корректное использование формулы (*).

Компетенции: ОПК-1

Экспертное заключение

Представленный комплект оценочных материалов по дисциплине «Теория функций комплексного переменного» соответствует требованиям ФГОС ВО.

Предлагаемые оценочные материалы адекватны целям и задачам реализации основной профессиональной образовательной программы по направлению подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика.

Виды оценочных средств, включенные в представленный фонд, отвечают основным принципам формирования ФОС.

Разработанные и представленные для экспертизы оценочные материалы рекомендуются к использованию в процессе подготовки обучающихся по указанному направлению.

Председатель учебно-методической комиссии
института компьютерных систем и
информационных технологий

Ветрова Н. Н.

Лист изменений и дополнений

№ п/п	Виды дополнений и изменений	Дата и номер протокола заседания кафедры (кафедр), на котором были рассмотрены и одобрены изменения и дополнения	Подпись (с расшифровкой) заведующего кафедрой (заведующих кафедрами)
1.	Дополнен комплектом оценочных материалов	протокол заседания кафедры прикладной математики № <u>8</u> от <u>24. 02. 2025</u>	 В.В. Малый