

**Комплект оценочных материалов по дисциплине
«Операционное исчисление»**

Задания закрытого типа

Задания закрытого типа на выбор правильного ответа

1. Выберите один правильный ответ

Найти показатель роста s_0 функции $f(t) = t^2$, используя определение $s_0 = \inf s, s > 0, \lim_{t \rightarrow \infty} |f(t)|e^{-st} < M, M < \infty$:

А) -2

Б) 0

В) -5

Г) 3

Правильный ответ: Б

Компетенции (индикаторы): ОПК-1

2. Выберите один правильный ответ

Вычислить интеграл Лапласа $F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$ для функции Хэвисайда:

$$\eta(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

А) $\frac{p-1}{p^2}$

Б) e^p

В) $\frac{1}{p}$

Г) $\frac{1}{p+1}$

Правильный ответ: В

Компетенции (индикаторы): ОПК-1

3. Выберите один правильный ответ

По определению и, используя линейность, найти изображение функции

$$\sin t = \frac{1}{2i} (e^{it} - e^{-it}):$$

А) $\frac{1}{p^2}$

Б) $\frac{1}{p^2+1}$

В) $\frac{p}{p^2+1}$

Г) $\frac{1}{p-1}$

Правильный ответ: Б

Компетенции (индикаторы): ОПК-1

4. Выберите один правильный ответ

Используя теорему подобия: если $f(t) \rightarrow F(p)$ и $\alpha > 0$, тогда $f(\alpha t) \rightarrow \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right)$, найти изображение функции $\cos^2 \alpha t = \frac{1+\cos 2\alpha t}{2}$:

А) $\frac{p^2}{p(p^2+4\alpha^2)}$

Б) $\frac{p+2\alpha^2}{(p^2+4\alpha^2)}$

В) $\frac{p^2+2\alpha^2}{p(p^2+4\alpha^2)}$

Г) $\frac{2}{p(p^2+4\alpha^2)}$

Правильный ответ: В

Компетенции (индикаторы): ОПК-1

Задания закрытого типа на установление соответствия

1. Установите правильное соответствие. Каждому элементу левого столбца соответствует только один элемент правого столбца.

	Функция-оригинал		Порядок роста
1)	$\eta(t)$	А)	$\ln 2$
2)	$t2^t$	Б)	3
3)	$\sin t e^t$	В)	0
4)	$(t^2 + 1)e^{3t}$	Г)	1

Правильный ответ:

1	2	3	4
В	А	Г	Б

Компетенции (индикаторы): ОПК-1

2. Установите правильное соответствие. Каждому элементу левого столбца соответствует только один элемент правого столбца.

	Функция-оригинал		Изображение по Лапласу
1)	$e^{\alpha t}$	А)	$\frac{10}{p^2 + 25}$
2)	t^n	Б)	$\frac{1}{p - \alpha}, \operatorname{Re} p > \operatorname{Re} \alpha$
3)	$\operatorname{ch} t = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t})$	В)	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
4)	$2 \sin 5t$	Г)	$\frac{p}{p^2 - 1}$

Правильный ответ:

1	2	3	4
Б	В	Г	А

Компетенции (индикаторы): ОПК-1

3. Установите правильное соответствие. Каждому элементу левого столбца соответствует только один элемент правого столбца.

	Производная $f'(t)$ функции-оригинала		Изображение $f'(t)$ по Лапласу
1)	$(e^{-t} \cos 3t)'$	А)	$\frac{p}{p^2 + 1}$
2)	$(t^2)'$	Б)	$p \frac{p+1}{(p+1)^2 + 9} - 1$
3)	$(\sin t)'$	В)	$\frac{2}{p-2}$
4)	$(e^{2t})'$	Г)	$\frac{2}{p^2}$

Правильный ответ:

1	2	3	4
Б	Г	А	В

Компетенции (индикаторы): ОПК-1

4. Установите правильное соответствие. Каждому элементу левого столбца соответствует только один элемент правого столбца.

	Функция-оригинал		Изображение по Лапласу по формуле дифференцирования изображения
1)	$t^2 \cos a t$	А)	$\frac{p^2(p^4 - 12a^2)}{(p^4 + 4a^4)^2}$
2)	$t^2 \sin a t$	Б)	$\frac{4}{(2p+1)^2}$
3)	$t \cos a t \cdot \text{chat}$	В)	$\frac{2a(3p^2 - a^2)}{(p^2 + a^2)^3}$
4)	$te^{-\frac{t}{2}}$	Г)	$\frac{2p(p^2 - 3a^2)}{(p^2 + a^2)^3}$

Правильный ответ:

1	2	3	4
Г	В	А	Б

Компетенции (индикаторы): ОПК-1

Задания закрытого типа на установление правильной последовательности

1. Расположите функции-оригиналы по возрастанию параметра s_0 (параметра роста):

А) $\frac{1}{2} e^t \sin 2t$

Б) $t^5 5^t$

В) $\sin 3t \cos 7t$

Г) $t^3 e^{2t+1}$

Правильный ответ: В, А, Б, Г

Компетенции (индикаторы): ОПК-1

2. Расположите изображения по Лапласу $F(p)$ в порядке возрастания числа их полюсов:

А) $\frac{p}{(p^2+1)^2}$

Б) $\frac{p}{p^2+1}$

В) $\frac{1}{p-1}$

Г) $2 \cos 3t \sin(t+1)$

Правильный ответ: Г, В, Б, А

Компетенции (индикаторы): ОПК-1

3. Расположите значения функции-оригинала $x(t)$ на множестве $t \in \{\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi\}$ в порядке их убывания, если $x(t)$ является решением уравнения:

$$x''' + x' = t, x(0) = 0, x'(0) = -1, x''(0) = 0$$

А) $x\left(\frac{\pi}{4}\right)$

Б) $x\left(\frac{\pi}{2}\right)$

В) $x(\pi)$

Г) $x\left(\frac{3}{2}\pi\right)$

Правильный ответ: Г, В, А, Б

Компетенции (индикаторы): ОПК-1

4. Расположите функции-оригиналы в порядке возрастания числа действительных полюсов их изображений по Лапласу:

А). $\eta(t)$

Б). $t^2 \sin at$

В) $e^t - t - 1$

Г) $\sin 3t \cos 7t$

Правильный ответ: Г, А, Б, В

Компетенции (индикаторы): ОПК-1

Задания открытого типа

Задания открытого типа на дополнение

1. Напишите пропущенное слово (словосочетание).

_____ функции-оригинала $f(t)$ называют функцию комплексного переменного $p = s + i\sigma$, определенную интегралом Лапласа $F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt$.

Правильный ответ: изображением.

Компетенции (индикаторы): ОПК-1

2. Напишите пропущенное слово (словосочетание).

_____ $f(t)$ изображение $F(p)$ определено на полуплоскости $\operatorname{Re} p > S_0$, где S_0 – показатель роста $f(t)$, и является в этой полуплоскости аналитической функцией.

Правильный ответ: для любого оригинала.

Компетенции (индикаторы): ОПК-1

3. Напишите пропущенное слово (словосочетание).

_____ изображения $F(p)$ сдвигает график его оригинала $f(t)$ в правую сторону на отрезок $[0; t_0]$.

Правильный ответ: умножение на e^{-pt_0} .

Компетенции (индикаторы): ОПК-1

4. Напишите пропущенное слово (словосочетание).

_____ изображения $F(p)$ отвечает действие умножения на $(-t)$ функции-оригинала $f(t)$.

Правильный ответ: дифференцированию.

Компетенции (индикаторы): ОПК-1

5. Напишите пропущенное слово (словосочетание).

Интеграл $\int_0^\infty \varphi(t - \tau) f(t) d\tau$ от непрерывных функций $\varphi(t)$ и $f(t)$, $0 \leq t < \infty$ (обозначение $\varphi * f$) называют _____.

Правильный ответ: сверткой.

Компетенции (индикаторы): ОПК-1

Задания открытого типа с кратким свободным ответом

1. Чему равно преобразование Лапласа производной функции-оригинала $f(t) = e^{-t} \cos 3t$? (Ответ запишите в виде функции)

Правильный ответ: $L[f'(t)] = p \frac{p+1}{(p+1)^2+9} - 1$.

Компетенции (индикаторы): ОПК-1

2. Найти промежуток сдвига вправо функции-оригинала $\eta(t)$ при умножении её преобразования Лапласа $\frac{1}{p}$ на e^{-3p} (Ответ запишите в виде интервала)

Правильный ответ: $[0,3]$.

Компетенции (индикаторы): ОПК-1

3. Найти значение функции-оригинала $f(t)$ в точке $t = \pi$, если её преобразование Лапласа $F(p)$ имеет вид $\frac{p^2+2}{p(p^2+4)}$ (Ответ запишите в виде числа)

Правильный ответ: 1.

Компетенции (индикаторы): ОПК-1

4. Найти наибольшее значение функции-оригинала $f(t)$ на отрезке $[0; \pi]$ при известном преобразовании $\frac{1}{p^2+1}$ (Ответ запишите в виде числа)

Правильный ответ: 1.

Компетенции (индикаторы): ОПК-1

5. Найти сумму наибольшего и наименьшего значений функции-оригинала $f(t)$ на отрезке $[0; \ln 2]$, если $F[f(t)] = \frac{1}{p-1}$ (Ответ запишите в виде числа)

Правильный ответ: 3.

Компетенции (индикаторы): ОПК-1

Задания открытого типа с развернутым ответом

1. Решить задачу, используя методы операционного исчисления:

Найти оригинал $f(t)$, если

$$F(p) = \frac{p+2}{(p+1)(p-2)(p^2+4)}.$$

Привести расширенное решение.

Время выполнения – 30 мин.

Ожидаемый результат:

1. Учитывая, что функция $F(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)}$ мероморфная, найдем её полюса, которые совпадают с нулями знаменателя

$$\begin{aligned} F_2(p) = 0 &\Rightarrow (p+1)(p-2)(p^2+4) = 0 \\ &\Rightarrow p_1 = -1, p_2 = 2, p_3 = 2i, p_4 = -2i \end{aligned}$$

2. Все полюса простые, поэтому, в духе формулы второй теоремы обращения, предварительно вычислим $F_2'(p)$:

$$\begin{aligned} F_2(p) &= (p^2 - p - 2)(p^2 + 4) = p^4 - p^3 + 2p^2 - 4p - 8 \\ &\Rightarrow F_2'(p) = 4p^3 - 3p^2 + 4p - 4. \end{aligned}$$

3. Находим оригинал по формуле второй теоремы обращения:

$$\begin{aligned}
f(t) &= \sum_{k=1}^4 \frac{p_k + 2}{4p_k^3 - 3p_k^2 + 4p_k - 4} e^{p_k t} = \\
&= -\frac{1}{15} e^{-t} + \frac{4}{32 - 12 + 8 - 4} e^{2t} + \\
&+ \frac{2i + 2}{4 \cdot 8i^3 - 3 \cdot 4i^2 + 4 \cdot 2i - 4} e^{2it} + \frac{-2i + 2}{-32i^3 - 12i^2 - 8i - 4} e^{-2it} = \\
&= -\frac{1}{15} e^{-t} + \frac{1}{6} e^{2t} + \frac{-1 + 2i}{20} e^{2it} + \frac{-1 - 2i}{20} e^{-2it} = \\
&= -\frac{1}{15} e^{-t} + \frac{1}{6} e^{2t} - \frac{1}{10} \left(\frac{1}{2} (e^{2it} + e^{-2it}) \right) + \frac{2i}{20} \cdot \frac{2i}{2i} (e^{2it} - e^{-2it}) = \\
&= -\frac{1}{15} e^{-t} + \frac{1}{6} e^{2t} - \frac{1}{10} \cos 2t - \frac{1}{5} \sin 2t,
\end{aligned}$$

поскольку $\cos t = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it})$, $\sin t = \frac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it})$.

Ответ: $f(t) = -\frac{1}{15} e^{-t} + \frac{1}{6} e^{2t} - \frac{1}{10} \cos 2t - \frac{1}{5} \sin 2t$.

Критерии оценивания:

- нахождение полюсов мероморфной функции $F(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)}$;
- вычисление $F_2'(p)$ в рамках использования второй теоремы обращения;
- нахождение оригинала по формуле $f(t) = \sum_{k=1}^n \frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)} e^{p_k t}$.

Компетенции (индикаторы): ОПК-1, ОПК-2, ОПК-7

2. Решить задачу, используя методы операционного исчисления:

С помощью формулы Дюамеля решить уравнение с заданными начальными условиями:

$$\begin{aligned}
x'' - 4x &= t - 1 \\
x(0) &= x'(0) = 0
\end{aligned}$$

Привести расширенное решение.

Время выполнения – 30 мин.

Критерии оценивания:

- построение вспомогательной задачи Коши;
- построение операторного уравнения;
- нахождение функции-оригинала вспомогательной задачи Коши;
- нахождение решения основной задачи с помощью формулы Дюамеля.

Ожидаемый результат:

1. Рассмотрим вспомогательную задачу Коши:

$$\begin{aligned}
x_1'' - 4x_1 &= 1 \\
x_1(0) &= x_1'(0) = 0.
\end{aligned}$$

2. Пусть $x_1(t) \rightarrow X_1(p)$, $x_1''(t) \rightarrow p^2 X_1(p)$, $1 \rightarrow \frac{1}{p}$.

Тогда операторное уравнение будет иметь вид

$$X_1(p)(p^2 - 4) = \frac{1}{p} \Rightarrow X_1(p) = \frac{1}{p(p^2 - 4)}.$$

3. Переходя к оригиналам, находим

$$X_1(p) = \frac{1}{p(p^2 - 4)} = \frac{1}{4} \left(\frac{p}{p^2 - 4} - \frac{1}{p} \right) \rightarrow \frac{1}{4} (ch2t - 1).$$

Таким образом, $x_1(t) = \frac{1}{4} (ch2t - 1)$.

4. Далее, используя формулу Дюамеля, получим

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^t (\tau - 1) \frac{1}{4} 2sh2(t - \tau) d\tau = - \int_0^t (\tau - 1) \frac{1}{4} d(ch(2(t - \tau))) = \\ &= -(\tau - 1) \frac{1}{4} ch2(t - \tau) \Big|_0^t + \int_0^t \frac{1}{4} ch(2(t - \tau)) d(\tau - 1) = \\ &= \frac{1}{8} (sh2(t - \tau) - 2(\tau - 1)ch2(t - \tau)) \Big|_0^t = \frac{1}{8} (sh2t - 2ch2t - 2t + 2). \end{aligned}$$

Ответ: $x(t) = \frac{1}{8} (sh2t - 2ch2t - 2t + 2)$.

Критерии оценивания:

- построение вспомогательной задачи Коши;
- построение операторного уравнения;
- нахождение функции-оригинала вспомогательной задачи Коши;
- нахождение решения основной задачи с помощью формулы Дюамеля.

Компетенции (индикаторы): ОПК-1, ОПК-2, ОПК-7

Экспертное заключение

Представленный комплект оценочных материалов по дисциплине «Операционное исчисление» соответствует требованиям ФГОС ВО.

Предлагаемые оценочные материалы адекватны целям и задачам реализации основной профессиональной образовательной программы по направлению подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика.

Виды оценочных средств, включенные в представленный фонд, отвечают основным принципам формирования ФОС.

Разработанные и представленные для экспертизы оценочные материалы рекомендуются к использованию в процессе подготовки обучающихся по указанному направлению.

Председатель учебно-методической комиссии
института компьютерных систем и
информационных технологий

Ветрова Н. Н.

Лист изменений и дополнений

№ п/п	Виды дополнений и изменений	Дата и номер протокола заседания кафедры (кафедр), на котором были рассмотрены и одобрены изменения и дополнения	Подпись (с расшифровкой) заведующего кафедрой (заведующих кафедрами)
1.	Дополнен комплектом оценочных материалов	протокол заседания кафедры прикладной математики № <u>8</u> от <u>24.02.2025</u>	 В.В. Малый