# Комплект оценочных материалов по дисциплине «Краевые задачи и вариационное исчисление»

**Задания закрытого типа**

**Задания закрытого типа на выбор правильного ответа**

1. Выберите один правильный ответ

Какая задача называется задачей Дирихле

А) задача с граничными условиями второго рода;

Б) задача с заданными значениями функции на границе;

В) задача с условиями третьего рода;

Г) задача с подвижными границами.

Правильный ответ: Б

Компетенции: ПК-1

2. Выберите один правильный ответ

Какой метод используется для приближённого решения вариационных задач

А) метод Ньютона;

Б) метод Лагранжа;

В) метод Гаусса;

Г) метод Ритца.

Правильный ответ: Г

Компетенции: ПК-1

3. Выберите один правильный ответ

Уравнение Лапласа относится к уравнениям:

А) Гиперболического типа;

Б) Параболического типа;

В) Эллиптического типа;

Г) Смешанного типа.

Правильный ответ: В

Компетенции: ПК-1

4. Выберите один правильный ответ

Функционал — это:

А) Функция от нескольких переменных;

Б) Отображение, ставящее в соответствие функции число;

В) Производная функции;

Г) Интеграл от дифференциального уравнения.

Правильный ответ: Б

Компетенции: ПК-1

5. Выберите один правильный ответ

Вариация функционала — это:

А) Производная функционала по переменной

Б) Линейная часть приращения функционала

В) Вторая производная функционала

Г) Интеграл от функционала

Правильный ответ: Б

Компетенции: ПК-1

#### Задания закрытого типа на установление соответствия

1. Установите правильное соответствие. Каждому элементу левого столбца соответствует только один элемент правого столбца. Установите соответствие между задачами и их типами:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | Задача |  | Тип |
| 1) | Задача Дирихле | А) | Значение функции на границе |
| 2) | Задача Неймана | Б) | Производная функции на границе |
| 3) | Задача Робена | В) | Комбинация функции и её производной |
| 4) | Задача Коши | Г) | Начальные условия для временной переменной |

Правильный ответ:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| А | Б | В | Г |

Компетенции: ПК-1

2. Установите правильное соответствие. Каждому элементу левого столбца соответствует только один элемент правого столбца. Соотнесите уравнения с их типами:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | Уравнение |  | Тип |
| 1) |  | А) | Гиперболическое |
| 2) |  | Б) | Параболическое |
| 3) |  | В) | Смешанное |
| 4) |  | Г) | Эллиптическое |

Правильный ответ:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| А | Б | Г | В |

Компетенции: ПК-1

3. Установите правильное соответствие. Каждому элементу левого столбца соответствует только один элемент правого столбца. Соотнесите методы с их описанием:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | Метод |  | Описание |
| 1) | Метод Ритца | А) | Дискретизация области на элементы |
| 2) | Метод конечных элементов | Б) | Ортогональность невязки к базису |
| 3) | Метод Бубнова-Галеркина | В) | Минимизация функционала |
| 4) | Метод характеристик | Г) | Решение вдоль характеристических линий |

Правильный ответ:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| В | Б | А | Г |

Компетенции: ПК-1

4. Установите правильное соответствие. Каждому элементу левого столбца соответствует только один элемент правого столбца. Соотнесите термины с определениями:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | Термин |  | Определение |
| 1) | Вариация функционала | А) | Отображение функции в число |
| 2) | Уравнение Эйлера | Б) | Линейная часть приращения |
| 3) | Условие трансверсальности | В) | Необходимое условие экстремума |
| 4) | Функционал | Г) | Условие для подвижных границ |

Правильный ответ:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| Б | В | Г | А |

Компетенции: ПК-1

5. Установите правильное соответствие. Каждому элементу левого столбца соответствует только один элемент правого столбца. Соотнесите методы с их применением:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | Метод |  | Применение |
| 1) | Метод Фурье | А) | Решение с помощью тригонометрических рядов |
| 2) | Метод Ритца | Б) | Приближение пробными функциями |
| 3) | Метод конечных разностей | В) | Дискретизация производных |
| 4) | Метод Галеркина | Г) | Ортогональность невязки |

Правильный ответ:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| А | Б | В | Г |

Компетенции: ПК-1

#### Задания закрытого типа на установление правильной последовательности

1. Укажите порядок этапов решения вариационной задачи методом Ритца:

А) Выбор пробных функций

Б) Минимизация функционала

В) Построение функционала

Г) Получение приближённого решения

Правильный ответ: В, А, Б, Г

Компетенции: ПК-1

2.Укажите порядок действий при выводе уравнения Эйлера:

А) Запись вариации функционала

Б) Применение основной леммы вариационного исчисления

В) Интегрирование по частям

Г) Получение дифференциального уравнения

Правильный ответ: А, В, Б, Г

Компетенции: ПК-1

3. Этапы построения функционала для краевой задачи:

А) Формулировка физической задачи

Б) Выбор функционала энергии

В) Запись вариационного принципа

Г) Применение метода Ритца

Правильный ответ: А, В, Б, Г

Компетенции: ПК-1

4. Этапы применения метода Бубнова-Галеркина:

А) Запись невязки

Б) Ортогонализация невязки к базису

В) Решение системы уравнений

Г) Выбор базисных функций

Правильный ответ: Г, А, Б, В

Компетенции: ПК-1

5. Последовательность решения задачи с подвижными границами:

А) Учет условий трансверсальности

Б) Построение уравнения Эйлера

В) Запись вариации функционала

Г) Решение дифференциального уравнения

Правильный ответ: В, Б, А, Г

Компетенции: ПК-1

**Задания открытого типа**

#### Задания открытого типа на дополнение

1. Напишите пропущенное слово (словосочетание).

Метод, использующий минимизацию функционала на пробных функциях, называется \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

Правильный ответ: метод Ритца.

Компетенции: ПК-1

2. Напишите пропущенное слово (словосочетание).

Для уравнения Лапласа граничное условие первого рода называется \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

Правильный ответ: задачей Дирихле.

Компетенции: ПК-1

3. Напишите пропущенное слово (словосочетание).

Метод, использующий ортогональность невязки к базисным функциям, — это метод \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

Правильный ответ: Бубнова-Галеркина.

Компетенции: ПК-1

4. Напишите пропущенное слово (словосочетание).

Функционал — это отображение, которое ставит в соответствие функции \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

Правильный ответ: число

Компетенции: ПК-1

5. Напишите пропущенное слово (словосочетание).

Метод, используемый для приближённого решения краевых задач с помощью сеток, называется \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

Правильный ответ: метод конечных элементов

Компетенции: ПК-1

#### Задания открытого типа с кратким свободным ответом

1. Запишите уравнение Лапласа *(в ответе напишите формулу)*

Правильный ответ:

Компетенции: ПК-1

2. Напишите тип уравнения *(ответ запишите словами)*

Правильный ответ: гиперболическое

Компетенции: ПК-1

3. Чему равна вариация функционала ? *(ответ запишите в виде уравнения)*

Правильный ответ:

Компетенции: ПК-1

4. Запишите уравнение Эйлера для заданного функционала *(в ответе запишите полученное уравнение)*

Правильный ответ:

Компетенции: ПК-1

5. Найдите экстремаль функционала *(в ответе запишите полученное уравнение)*

Правильный ответ:

Компетенции: ПК-1

#### Задания открытого типа с развернутым ответом

1. Требуется решить краевую задачу для уравнения Пуассона на прямоугольнике



Привести расширенное решение.

Время выполнения – 45 мин.

Ожидаемый результат:

Будем искать решение в виде где



Найдем и из соответствующих задач Штурма-Лиувилля. Именно,



Теперь найдем коэффициенты разложения



Из исходного уравнения имеем



Следовательно, где



.



Решением исходной задачи является функция



Критерии оценивания:

– построение задач Штурма-Лиувилля;

– решение построенных задач;

– нахождение коэффициентов разложения;

– решение поставленной задачи.

Компетенции: ПК-1

2. Исследовать на экстремум, следующий интегральный функционал с заданными граничными условиями, используя аналитический метод Эйлера:

, , .

Привести расширенное решение.

Время выполнения – 45 мин.

Ожидаемый результат:

1. Составим уравнение Эйлера (это уравнение является необходимым условием экстремума вариационной задачи), отвечающее данному функционалу.

Уравнение Эйлера имеет вид:

.

В нашем случае .

, , , , , .

Подставив, получим  или , .

2. Найдем общее решение полученного дифференциальго уравнения. Это уравнение вида ,  - кратным интегрированием правой части получим общее решение.

, .

3. Используя граничные точки данной вариационной задачи, найдем произвольные постоянные, входящие в общее решение:

.

4. Решая эту систему относительно произвольных постоянных, получим:, .

Тогда возможная экстремаль данной системы задается уравнением: .

5. Исследуем функционал на наличие у него действительного экстремума. При выяснении вопроса о существовании и характере экстремума на найденной экстремали необходимо знать особенности поведения в области задания функционала, трех функций.

Функция Якоби – она решает вопрос о наличии или отсутствии на отрезке точек, сопряженных начальной точке отрезка, т.е. точке . Это, в свою очередь, определяет возможность включения данной экстремали в поле функционала.

Функция Лежандра - . Она определяет знак самого функционала и влияет на знак самого экстремума, т.е. на то, каким он будет, максимумом или минимумом.

Функция Вейерштрасса – она аналогично функции Якоби в том смысле, что позволяет оценить повеление разности функций  в окрестности экстремали (здесь  - произвольная допустимая функция).

Вначале вычислим функцию Лежандра и определимся с поведением ее знака на отрезке; затем выясним вопрос о возможности включения экстремали в поле как непосредственно, так и опосредованно, с помощью функции Якоби; затем построим функцию Вейерштрасса, чтобы определить характер и тип экстремума данной задачи.

а) Проверим выполнимость условия Лежандра.

Подставим функцию в  и рассмотрим изменение знака  на замкнутом отрезке . Так как  , то найденная экстремаль может реализовать минимум интегрального функционала.

б) Проверим, можно ли включить данную экстремаль в поле экстремалей.

Первоначально сделаем это непосредственно.

Вычислим наклон поля в точках экстремали

.

Семейство интегральных кривых уравнения Эйлера имеет вид: . Поэтому наклон касательных к этим кривым равен . Следовательно, при , найденная экстремаль является одной из интегральных кривых, удовлетворяющая полевому условию . Значит, найденная экстремаль может быть включена в собственное поле экстремалей данной вариационной задачи.

Установим этот же факт опосредованно.

Проверим выполнимость условия Якоби, которое гарантирует отсутствие сопряженных точек на отрезке . (точка  называется сопряженной по отношению к , если существует не равное тождественно нулю решение  уравнения Якоби , которое удовлетворяет начальным условиям , ). Для этого составим и решим уравнение Якоби.

, .

Следовательно, уравнение Якоби имеет вид: , . По форме оно совпадает с уравнение Эйлера, тогда общее решение относительно функции  будет . Накладывая на него начальные условия , , получим систему уравнений относительно произвольных постоянных

  , .

Тогда частное решение имеет вид: . Так как это решение кроме начальной точки , нигде не обращается в нуль, то условие Якоби выполнено.

в) Составим функцию Вейерштрасса:

.

где

 - наклон поля (производная) исследуемой экстремали;

 - производная некоторой произвольной допустимой функции , т.е. дифференцируемой и удовлетворяющей краевым условиям вариационной задачи.

В нашем случае:

, , .

Тогда функция Вейерштрасса

.

Суммируя полученную информацию, сделаем вывод о типе и характере экстремума исходного интегрального функционала с заданными краевыми условиями.

1) Так как на отрезке  нет сопряженных точек и функция Лежандра в точках экстремали строго больше нуля, то на данной экстремали функционал достигает слабого минимума и поскольку  - имеет место сильный минимум.

2) Так как функция Вейерштрасса  сохраняет знак во всех точках плоскости, близких к экстремали, т.е. , следовательно, функционал имеет минимум, а так как выполняется условие Якоби, то экстремаль доставляет функционалу сильный минимум.

Таким образом, в результате проведенного полного анализа данной простейшей вариационной задачи, можно сделать вывод:

Искомый функционал на найденной экстремали достигает как слабого, так и сильного минимума.

6. Вычислим минимальной значение функционала  на найденной экстремали, подставив ее саму и ее производную в подинтегральную функцию , :

.

7. График экстремали , доставляющей минимум функционалу имеет вид:

-0.5

0.5

1

-2

-1

1





Правильный ответ: - экстремаль, 

Критерии оценивания:

– составление уравнение Эйлера;

– нахождение общего решения полученного дифференциального уравнения;

– исследование функционала на наличие у него действительного экстремума;

– вычисление минимального значения функционала на найденной экстремали.

Компетенции: ПК-1