Комплект оценочных материалов по дисциплине «Краевые задачи и вариационное исчисление»

Задания закрытого типа

Задания закрытого типа на выбор правильного ответа

1. Выберите один правильный ответ
Какая задача называется задачей Дирихле
А) задача с граничными условиями второго рода;
Б) задача с заданными значениями функции на границе;
В) задача с условиями третьего рода;
Г) задача с подвижными границами.
Правильный ответ: Б
Компетенции: ПК-1

2. Выберите один правильный ответ
Какой метод используется для приближённого решения вариационных задач
А) метод Ньютона;
Б) метод Лагранжа;
В) метод Гаусса;
Г) метод Ритца.
Правильный ответ: Г
Компетенции: ПК-1

3. Выберите один правильный ответ
Уравнение Лапласа относится к уравнениям:
А) Гиперболического типа;
Б) Параболического типа;
В) Эллиптического типа;
Г) Смешанного типа.
Правильный ответ: В
Компетенции: ПК-1

4. Выберите один правильный ответ
Функционал — это:
А) Функция от нескольких переменных;
Б) Отображение, ставящее в соответствие функции число;
В) Производная функции;
Г) Интеграл от дифференциального уравнения.
Правильный ответ: Б
Компетенции: ПК-1

5. Выберите один правильный ответ
Вариация функционала — это:
А) Производная функционала по переменной
Б) Линейная часть приращения функционала
В) Вторая производная функционала
Г) Интеграл от функционала
Правильный ответ: Б
Компетенции: ПК-1

Задания закрытого типа на установление соответствия

1. Установите правильное соответствие. Каждому элементу левого столбца соответствует только один элемент правого столбца. Установите соответствие между задачами и их типами:

	Задача		Тип
1)	Задача Дирихле	А)	Значение функции на границе
2)	Задача Неймана	Б)	Производная функции на границе
3)	Задача Робена	В)	Комбинация функции и её производной
4)	Задача Коши	Г)	Начальные условия для временной переменной

Правильный ответ:

1	2	3	4
А	Б	В	Г

Компетенции: ПК-1

2. Установите правильное соответствие. Каждому элементу левого столбца соответствует только один элемент правого столбца. Соотнесите уравнения с их типами:

	Уравнение		Тип
1)	$u_{tt} = 9u_{xx}$	А)	Гиперболическое
2)	$u_t = 3u_{xx}$	Б)	Параболическое
3)	$u_{xx} + u_{yy} = x^2$	В)	Смешанное
4)	$u_{tt} + u_{xx} = 0$	Г)	Эллиптическое

Правильный ответ:

1	2	3	4
А	Б	Г	В

Компетенции: ПК-1

3. Установите правильное соответствие. Каждому элементу левого столбца соответствует только один элемент правого столбца. Соотнесите методы с их описанием:

	Метод		Описание
1)	Метод Ритца	А)	Дискретизация области на элементы
2)	Метод конечных элементов	Б)	Ортогональность невязки к базису
3)	Метод Бубнова-Галеркина	В)	Минимизация функционала
4)	Метод характеристик	Г)	Решение вдоль характеристических линий

Правильный ответ:

1	2	3	4
В	Б	А	Г

Компетенции: ПК-1

4. Установите правильное соответствие. Каждому элементу левого столбца соответствует только один элемент правого столбца. Соотнесите термины с определениями:

	Термин		Определение
1)	Вариация функционала	А)	Отображение функции в число
2)	Уравнение Эйлера	Б)	Линейная часть приращения
3)	Условие трансверсальности	В)	Необходимое условие экстремума
4)	Функционал	Г)	Условие для подвижных границ

Правильный ответ:

1	2	3	4
Б	В	Г	А

Компетенции: ПК-1

5. Установите правильное соответствие. Каждому элементу левого столбца соответствует только один элемент правого столбца. Соотнесите методы с их применением:

	Метод		Применение
1)	Метод Фурье	А)	Решение с помощью тригонометрических рядов
2)	Метод Ритца	Б)	Приближение пробными функциями
3)	Метод конечных разностей	В)	Дискретизация производных
4)	Метод Галеркина	Г)	Ортогональность невязки

Правильный ответ:

1	2	3	4
А	Б	В	Г

Компетенции: ПК-1

Задания закрытого типа на установление правильной последовательности

1. Укажите порядок этапов решения вариационной задачи методом Ритца:
А) Выбор пробных функций
Б) Минимизация функционала
В) Построение функционала
Г) Получение приближённого решения
Правильный ответ: В, А, Б, Г
Компетенции: ПК-1

2.Укажите порядок действий при выводе уравнения Эйлера:
А) Запись вариации функционала
Б) Применение основной леммы вариационного исчисления
В) Интегрирование по частям
Г) Получение дифференциального уравнения
Правильный ответ: А, В, Б, Г
Компетенции: ПК-1

3. Этапы построения функционала для краевой задачи:
А) Формулировка физической задачи
Б) Выбор функционала энергии
В) Запись вариационного принципа
Г) Применение метода Ритца
Правильный ответ: А, В, Б, Г
Компетенции: ПК-1

4. Этапы применения метода Бубнова-Галеркина:
А) Запись невязки
Б) Ортогонализация невязки к базису
В) Решение системы уравнений
Г) Выбор базисных функций
Правильный ответ: Г, А, Б, В
Компетенции: ПК-1

5. Последовательность решения задачи с подвижными границами:
А) Учет условий трансверсальности
Б) Построение уравнения Эйлера

В) Запись вариации функционала
Г) Решение дифференциального уравнения
Правильный ответ: В, Б, А, Г
Компетенции: ПК-1

Задания открытого типа

Задания открытого типа на дополнение

1. Напишите пропущенное слово (словосочетание).
Метод, использующий минимизацию функционала на пробных функциях, называется ____________________.
Правильный ответ: метод Ритца.
Компетенции: ПК-1

2. Напишите пропущенное слово (словосочетание).
Для уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ граничное условие первого рода называется ____________________.
Правильный ответ: задачей Дирихле.
Компетенции: ПК-1

3. Напишите пропущенное слово (словосочетание).
Метод, использующий ортогональность невязки к базисным функциям, — это метод ____________________.
Правильный ответ: Бубнова-Галеркина.
Компетенции: ПК-1

4. Напишите пропущенное слово (словосочетание).
Функционал — это отображение, которое ставит в соответствие функции ____________________.
Правильный ответ: число
Компетенции: ПК-1

5. Напишите пропущенное слово (словосочетание).
Метод, используемый для приближённого решения краевых задач с помощью сеток, называется ____________________.
Правильный ответ: метод конечных элементов
Компетенции: ПК-1

Задания открытого типа с кратким свободным ответом

1. Запишите уравнение Лапласа *(в ответе напишите формулу)*
Правильный ответ: $\Delta u = 0$
Компетенции: ПК-1

2. Напишите тип уравнения $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ *(ответ запишите словами)*
Правильный ответ: гиперболическое
Компетенции: ПК-1

3. Чему равна вариация функционала $J[y] = y(a)$? *(ответ запишите в виде уравнения)*
Правильный ответ: $\delta J = \delta y(a)$
Компетенции: ПК-1

4. Запишите уравнение Эйлера для заданного функционала *(в ответе запишите полученное уравнение)*

$$J[y] = \int_0^1 (xy + y^2 - 2y^2 y')\, dx$$

Правильный ответ: $x + 2y = 0$
Компетенции: ПК-1

5. Найдите экстремаль функционала $J[y] = \int_0^1 (xy + y^2 - 2y^2 y')\, dx$ *(в ответе запишите полученное уравнение)*
Правильный ответ: $y = -\frac{x}{2}$
Компетенции: ПК-1

Задания открытого типа с развернутым ответом

1. Требуется решить краевую задачу для уравнения Пуассона на прямоугольнике $0 \le x \le l_1,\ 0 \le y \le l_2$

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = x, \\ u(0,y) = 0,\ u_x(l_1,y) = 0, \\ u(x,0) = 0,\ u(x,l_2) = 0. \end{cases}$$

Привести расширенное решение.
Время выполнения – 45 мин.
Ожидаемый результат:
Будем искать решение в виде $u(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} A_{nm} W_{nm}(x,y),$ где

$$W_{nm}(x,y) = X_n(x) Y_m(y).$$

Найдем $X_n(x)$ и $Y_m(y)$ из соответствующих задач Штурма-Лиувилля. Именно,

$$\begin{cases} X_n'(x) + \mu_n X_n(x) = 0, \\ X_n(0) = 0,\ X_n'(l_1) = 0. \end{cases}$$

$$X_n(x) = C_1 \cos\sqrt{\mu_n}\, x + C_2 \sin\sqrt{\mu_n}\, x,$$

$$X_n(0) = C_1 = 0,$$

$$X_n'(l_1) = C_2\sqrt{\mu_n}\cos\sqrt{\mu_n}\, l_1 = 0,\ \cos\sqrt{\mu_n}\, l_1 = 0,\ \sqrt{\mu_n}\, l_1 = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n = 0,1,2,...,$$

$$\mu_n = \left(\frac{\pi + 2\pi n}{2l_1}\right)^2,$$

$$\left\|X_n(x)\right\|^2 = \int_0^{l_1} C_2^2 \sin^2\left(\frac{\pi + 2\pi n}{2l_1}\right) x dx = \frac{C_2^2}{2}\int_0^{l_1}\left(1 - \cos\left(\frac{\pi + 2\pi n}{l_1}\right) x\right) dx = \frac{C_2^2}{2} l_1 = 1,$$

$$C_2 = \sqrt{\frac{2}{l_1}},\quad X_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l_1}} \sin\frac{\pi + 2\pi n}{2l_1} x.$$

$$\begin{cases} Y_m'(y) + \nu_m Y_m(y) = 0, \\ Y_m(0) = 0, Y_m(l_2) = 0. \end{cases}$$

$$Y_m(y) = C_1 \cos\sqrt{\nu_m}\, y + C_2 \sin\sqrt{\nu_m}\, y,$$

$$Y_m(0) = C_1 = 0,$$

$$Y_m(l_2) = C_2 \sin\sqrt{\nu_m}\, l_2 = 0,\ \sin\sqrt{\nu_m}\, l_2 = 0,\ \sqrt{\nu_m}\, l_2 = \pi m,\ m = 0,1,2,...,$$

$$\nu_m = \left(\frac{\pi m}{l_2}\right)^2,$$

$$\left\|Y_m(y)\right\|^2 = \int_0^{l_2} C_2^2 \sin^2\left(\frac{\pi m}{l_2}\right) y dy = \frac{C_2^2}{2}\int_0^{l_2}\left(1 - \cos\left(\frac{2\pi m}{l_2}\right) y\right) dy == \frac{C_2^2}{2} l_2 = 1,$$

$$C_2 = \sqrt{\frac{2}{l_2}},\ Y_m(y) = \sqrt{\frac{2}{l_2}} \sin\frac{\pi m}{l_2} y.$$

Теперь найдем коэффициенты разложения A_{nm}.

Из исходного уравнения имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} A_{nm}\Delta W_{nm}(x,y) = -\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} A_{nm}\left(\mu_n + \nu_m\right) W_{nm}(x,y) =$$

$$= f(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} f_{nm} W_{nm}(x,y).$$

Следовательно, $A_{nm} = -\dfrac{f_{nm}}{\mu_n + \nu_m}$, где

$$f_{nm}=\int_0^{l_1}\int_0^{l_2} f(x,y)X_n(x)Y_m(y)dxdy=\frac{2}{\sqrt{l_1l_2}}\int_0^{l_1} x\sin\frac{\pi+2\pi n}{2l_1}xdx\int_0^{l_2}\sin\frac{\pi m}{l_2}ydy=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{l_1l_2}}\left(-x\frac{2l_1}{\pi+2\pi n}\cos\frac{\pi+2\pi n}{2l_1}x\Bigg|_0^{l_1}+\frac{2l_1}{\pi+2\pi n}\int_0^{l_1}\cos\frac{\pi+2\pi n}{2l_1}xdx\right)\times$$

$$\times\left(-\frac{l_2}{\pi m}\cos\frac{\pi m}{l_2}y\Bigg|_0^{l_2}\right)=\frac{2}{\sqrt{l_1l_2}}\left(\frac{2l_1}{\pi+2\pi n}\right)^2(-1)^n\frac{l_2}{\pi m}\left(1-(-1)^m\right).$$

$$A_{nm}=-\frac{\dfrac{2}{\sqrt{l_1l_2}}\left(\dfrac{2l_1}{\pi+2\pi n}\right)^2(-1)^n\dfrac{l_2}{\pi m}\left(1-(-1)^m\right)}{\left(\dfrac{\pi+2\pi n}{2l_1}\right)^2+\left(\dfrac{\pi m}{l_2}\right)^2}.$$

Решением исходной задачи является функция

$$u(x,y)=-\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\dfrac{2}{\sqrt{l_1l_2}}\left(\dfrac{2l_1}{\pi+2\pi n}\right)^2(-1)^n\dfrac{l_2}{\pi m}\left(1-(-1)^m\right)}{\left(\dfrac{\pi+2\pi n}{2l_1}\right)^2+\left(\dfrac{\pi m}{l_2}\right)^2}\times$$

$$\times\sqrt{\frac{2}{l_1}}\sin\frac{\pi+2\pi n}{2l_1}x\sqrt{\frac{2}{l_2}}\sin\frac{\pi m}{l_2}y=$$

$$=-16l_1\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\left(\dfrac{1}{\pi+2\pi n}\right)^2(-1)^n\dfrac{1}{\pi m}\left(1-(-1)^m\right)}{\left(\dfrac{\pi+2\pi n}{2l_1}\right)^2+\left(\dfrac{\pi m}{l_2}\right)^2}\sin\frac{\pi+2\pi n}{2l_1}x\sin\frac{\pi m}{l_2}y.$$

Критерии оценивания:
– построение задач Штурма-Лиувилля;
– решение построенных задач;
– нахождение коэффициентов разложения;
– решение поставленной задачи.

Компетенции: ПК-1

2. Исследовать на экстремум, следующий интегральный функционал с заданными граничными условиями, используя аналитический метод Эйлера:

$$J[y]=\int_0^1\left(y'^2+x^2\right)dx,\ \ y(0)=-1,\ \ y(1)=1.$$

Привести расширенное решение.

Время выполнения – 45 мин.

Ожидаемый результат:

1. Составим уравнение Эйлера (это уравнение является необходимым условием экстремума вариационной задачи), отвечающее данному функционалу.

Уравнение Эйлера имеет вид:

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0.$$

В нашем случае $F(x, y, y') = y'^2 + x^2$.

$$F_y = 0,\ F_{y'} = 2y',\ F_{y'y'} = 2,\ F_{yy'} = 0,\ F_x = 2x,\ F_{xy'} = 0.$$

Подставив, получим $-\frac{d}{dx}(2y') = 0$ или $-2y'' = 0$, $2y'' = 0$.

2. Найдем общее решение полученного дифференциальго уравнения. Это уравнение вида $F(x, y^{(n)}) = 0$, n - кратным интегрированием правой части получим общее решение.

$$y' = C_1,\ y = C_1 x + C_2.$$

3. Используя граничные точки данной вариационной задачи, найдем произвольные постоянные, входящие в общее решение:

$$\begin{cases} -1 = C_1 \cdot 0 + C_2 \\ 1 = C_1 \cdot 1 + C_2 \end{cases}.$$

4. Решая эту систему относительно произвольных постоянных, получим: $C_1 = 2$, $C_2 = -1$.

Тогда возможная экстремаль данной системы задается уравнением: $y = 2x - 1$.

5. Исследуем функционал на наличие у него действительного экстремума. При выяснении вопроса о существовании и характере экстремума на найденной экстремали необходимо знать особенности поведения в области задания функционала, трех функций.

Функция Якоби – она решает вопрос о наличии или отсутствии на отрезке точек, сопряженных начальной точке отрезка, т.е. точке $x = a$. Это, в свою очередь, определяет возможность включения данной экстремали в поле функционала.

Функция Лежандра - $F_{y'y'}$. Она определяет знак самого функционала и влияет на знак самого экстремума, т.е. на то, каким он будет, максимумом или минимумом.

Функция Вейерштрасса – она аналогично функции Якоби в том смысле, что позволяет оценить повеление разности функций $(\bar{y}(x) - y(x))$ в окрестности экстремали $y(x)$(здесь $\bar{y}(x)$ - произвольная допустимая функция).

Вначале вычислим функцию Лежандра и определимся с поведением ее знака на отрезке; затем выясним вопрос о возможности включения экстремали в поле как непосредственно, так и опосредованно, с помощью функции Якоби; затем построим функцию Вейерштрасса, чтобы определить характер и тип экстремума данной задачи.

а) Проверим выполнимость условия Лежандра.

Подставим функцию $y = 2x - 1$ в $P(x) = \frac{1}{2} F_{y'y'}(x, y(x), y'(x))$ и рассмотрим изменение знака $F_{y'y'}$ на замкнутом отрезке $[0;1]$. Так как $F_{y'y'} = 2 > 0 \quad \forall x \in [0;1]$, то найденная экстремаль может реализовать минимум интегрального функционала.

б) Проверим, можно ли включить данную экстремаль в поле экстремалей.

Первоначально сделаем это непосредственно.

Вычислим наклон поля в точках экстремали

$$\psi(x, y) = y'(x) = (2x - 1)' = 2 .$$

Семейство интегральных кривых уравнения Эйлера имеет вид: $y = C_1 x + C_2$. Поэтому наклон касательных к этим кривым равен $y' = (C_1 x + C_2)' = C_1$. Следовательно, при $C_1 = 2$, найденная экстремаль является одной из интегральных кривых, удовлетворяющая полевому условию $y'(x) = \psi(x, y)$. Значит, найденная экстремаль может быть включена в собственное поле экстремалей данной вариационной задачи.

Установим этот же факт опосредованно.

Проверим выполнимость условия Якоби, которое гарантирует отсутствие сопряженных точек на отрезке $[0;1]$. (точка $\tilde{x} \in [a; b]$ называется сопряженной по отношению к a, если существует не равное тождественно нулю решение $h(x)$ уравнения Якоби $-\frac{d}{dx}(P(x) \cdot h') + Q(x) \cdot h = 0$, которое удовлетворяет начальным условиям $h(a) = 0$, $h'(a) = 1$). Для этого составим и решим уравнение Якоби.

$$P(x) = \frac{1}{2} F_{y'y'} = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1, \quad Q(x) = \frac{1}{2}\left(F_{yy} - \frac{d}{dx} F_{yy'} \right) = \frac{1}{2}\left(0 - \frac{d}{dx}(0) \right) = 0 .$$

Следовательно, уравнение Якоби имеет вид: $-\frac{d}{dx}(1 \cdot h') + 0 \cdot h = 0$, $h'' = 0$. По форме оно совпадает с уравнение Эйлера, тогда общее решение относительно функции $h(x)$ будет $h(x) = C_1 x + C_2$. Накладывая на него начальные условия $h(0) = 0$, $h'(0) = 1$, получим систему уравнений относительно произвольных постоянных

$$\begin{cases} 0 = C_1 \cdot 0 + C_2 \\ 1 = C_1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad C_1 = 1, \; C_2 = 0 .$$

Тогда частное решение имеет вид: $h(x) = x$. Так как это решение кроме начальной точки $x = 0$, нигде не обращается в нуль, то условие Якоби выполнено.

в) Составим функцию Вейерштрасса:

$$E(x, y, \psi, y') = F(x, y, y') - F(x, y, \psi) - (y' - \psi) F_{\psi}(x, y, \psi).$$

где

ψ - наклон поля (производная) исследуемой экстремали;

y' - производная некоторой произвольной допустимой функции $y = y(x)$, т.е. дифференцируемой и удовлетворяющей краевым условиям вариационной задачи.

В нашем случае:

$$F(x, y, y') = y'^2 + x^2, \ F(x, y, \psi) = \psi^2 + x^2, \ F_\psi = 2\psi .$$

Тогда функция Вейерштрасса

$$E(x, y, \psi, y') = y'^2 + x^2 - \psi^2 - x^2 - (y' - \psi) \cdot 2\psi = y'^2 - 2\psi y' + \psi^2 = (y' - \psi)^2 > 0 .$$

Суммируя полученную информацию, сделаем вывод о типе и характере экстремума исходного интегрального функционала с заданными краевыми условиями.

1) Так как на отрезке $[0;1]$ нет сопряженных точек и функция Лежандра в точках экстремали строго больше нуля $P(x) = 1 > 0$, то на данной экстремали функционал достигает слабого минимума и поскольку $F_{y'y'} = 2 > 0$ - имеет место сильный минимум.

2) Так как функция Вейерштрасса $E(x, y, \psi, y')$ сохраняет знак во всех точках плоскости, близких к экстремали, т.е. $E(x, y, \psi, y') \geq 0$, следовательно, функционал имеет минимум, а так как выполняется условие Якоби, то экстремаль доставляет функционалу сильный минимум.

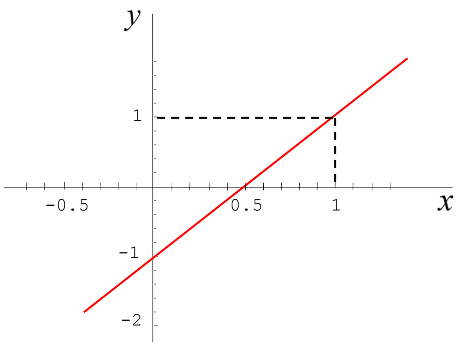
Таким образом, в результате проведенного полного анализа данной простейшей вариационной задачи, можно сделать вывод:

Искомый функционал на найденной экстремали достигает как слабого, так и сильного минимума.

6. Вычислим минимальной значение функционала $J[y]$ на найденной экстремали, подставив ее саму и ее производную в подинтегральную функцию $y_{\min} = 2x - 1$, $y'_{\min} = 2$:

$$J[y] = \int_0^1 \left(y'^2 + x^2\right)dx = \int_0^1 \left(2^2 + x^2\right)dx = \left(4x + \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = 4 - \frac{1}{3} = \frac{11}{3} \cong 3{,}67 .$$

7. График экстремали $y = 2x - 1$, доставляющей минимум функционалу имеет вид:



Правильный ответ: $y_{\min} = 2x - 1$ - экстремаль, $J[y] = \dfrac{11}{3} \cong 3{,}67$

Критерии оценивания:

– составление уравнение Эйлера;

– нахождение общего решения полученного дифференциального уравнения;

– исследование функционала на наличие у него действительного экстремума;

– вычисление минимального значения функционала на найденной экстремали.

Компетенции: ПК-1

Экспертное заключение

Представленный комплект оценочных материалов по дисциплине «Краевые задачи и вариационное исчисление» соответствует требованиям ФГОС ВО.

Предлагаемые оценочные материалы адекватны целям и задачам реализации основной профессиональной образовательной программы по направлению подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика.

Виды оценочных средств, включенные в представленный фонд, отвечают основным принципам формирования ФОС.

Разработанные и представленные для экспертизы оценочные материалы рекомендуются к использованию в процессе подготовки обучающихся по указанному направлению.

Председатель учебно-методической комиссии
института компьютерных систем и
информационных технологий Ветрова Н. Н.

Лист изменений и дополнений

№ п/п	Виды дополнений и изменений	Дата и номер протокола заседания кафедры (кафедр), на котором были рассмотрены и одобрены изменения и дополнения	Подпись (с расшифровкой) заведующего кафедрой (заведующих кафедрами)
1.	Дополнен комплектом оценочных материалов	протокол заседания кафедры прикладной математики № 8 от 24. 02. 2025	В.В. Малый