

**Комплект оценочных материалов по дисциплине
«Векторный и тензорный анализ»**

Задания закрытого типа

Задания закрытого типа на выбор правильного ответа

1. Укажите тождественно верное равенство:

А) $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}|$

Б) $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \alpha$

В) $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \alpha$

Г) $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| + |\vec{b}|$

Правильный ответ: Б

Компетенции: ПК-1

2. Укажите тождественно верное равенство:

А) $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}|$

Б) $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \alpha$

В) $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \alpha$

Г) $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$

Правильный ответ: В

Компетенции: ПК-1

3. Укажите тождественно верное равенство:

А) $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{F} = -1$

Б) $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{F} = 0$

В) $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{F} = 1$

Г) $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{F} = 2$

Правильный ответ: Б

Компетенции: ПК-1

4. Укажите тождественно верное равенство:

А) $\operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi = \vec{i}$

Б) $\operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi = \vec{j}$

В) $\operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi = \vec{k}$

Г) $\operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi = 0$

Правильный ответ:

Компетенции: ПК-1

Задания закрытого типа на установление соответствия

1. Установите правильное соответствие. Каждому элементу левого столбца соответствует только один элемент правого столбца.

Первое обозначение		Второе обозначение	
1)	$\text{grad } \varphi$	A)	$\nabla \cdot \vec{F}$
2)	$\text{div } \vec{F}$	Б)	$\nabla \cdot \nabla \varphi$
3)	$\text{rot } \vec{F}$	В)	$\nabla \varphi$
4)	$\Delta \varphi$	Г)	$\nabla \times \vec{F}$

Правильный ответ:

1	2	3	4
В	А	Г	Б

Компетенции: ПК-1

2. Установите правильное соответствие. Каждому элементу левого столбца соответствует только один элемент правого столбца.

Операция		Наименование	
1)	$\text{grad } \varphi$	A)	Ротор
2)	$\text{div } \vec{F}$	Б)	Градиент
3)	$\text{rot } \vec{F}$	В)	Оператор Лапласа
4)	$\Delta \varphi$	Г)	Дивергенция

Правильный ответ:

1	2	3	4
Б	Г	А	В

Компетенции: ПК-1

3. Установите правильное соответствие. Каждому элементу левого столбца соответствует только один элемент правого столбца.

Левая часть		Правая часть	
1)	$\iiint_V \text{div } \vec{F} dV$	A)	$\iint_S \varphi d\vec{S}$
2)	$\iint_S \text{rot } \vec{F} d\vec{S}$	Б)	$-\iint_S \vec{F} \times d\vec{S}$
3)	$\iiint_V \text{rot } \vec{F} dV$	В)	$\oint_l \vec{F} d\vec{l}$
4)	$\iiint_V \text{grad } \varphi dV$	Г)	$\iint_S \vec{F} d\vec{S}$

Правильный ответ:

1	2	3	4
Г	В	Б	А

Компетенции: ПК-1

4. Установите правильное соответствие. Каждому элементу левого столбца соответствует только один элемент правого столбца.

Операция	Выражение
1) $\text{grad } \varphi$	A) $\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$
2) $\Delta \varphi$	Б) $\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\vec{k}$
3) $\text{div } \vec{F}$	В) $\frac{\partial \varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\vec{k}$
4) $\text{rot } \vec{F}$	Г) $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$

Правильный ответ:

1	2	3	4
В	Г	А	Б

Компетенции: ПК-1

Задания закрытого типа на установление правильной последовательности

1. Расположите величины в порядке возрастания:

A) $|5\vec{i} + 12\vec{k}|$

Б) $|3\vec{i} + 4\vec{j}|$

В) $|7\vec{j} - 24\vec{k}|$

Г) $|15\vec{i} - 8\vec{j}|$

Правильный ответ: Б, А, Г, В

Компетенции: ПК-1

2. Расположите значения $|\text{grad } \varphi|$ в порядке возрастания:

A) $\varphi = 3x + 4y$

Б) $\varphi = 5x + 12z$

В) $\varphi = 7x - 24z$

Г) $\varphi = 15y - 8z$

Правильный ответ: А, Б, Г, В

Компетенции: ПК-1

3. Расположите значения $\operatorname{div} \vec{F}$ в порядке возрастания:

А) $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} - z\vec{k}$

Б) $\vec{F} = 3x\vec{i} - y\vec{j} + 5z\vec{k}$

В) $\vec{F} = 3x\vec{i} + 2y\vec{j} + z\vec{k}$

Г) $\vec{F} = 2x\vec{i} + 3y\vec{j} - 2z\vec{k}$

Правильный ответ: А, Г, В, Б

Компетенции: ПК-1

4. Расположите значения $|\operatorname{rot} \vec{F}|$ в порядке возрастания:

А) $\vec{F} = y\vec{i} - x\vec{j}$

Б) $\vec{F} = y\vec{i} - 2x\vec{j}$

В) $\vec{F} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k}$

Г) $\vec{F} = y\vec{i}$

Правильный ответ: В, Г, А, Б

Компетенции: ПК-1

Задания открытого типа

Задания открытого типа на дополнение

1. Вектор градиента характеризует величину и _____ наискорейшего возрастания скалярного поля.

Правильный ответ: направление

Компетенции: ПК-1

2. Функция φ такая, что $\Delta\varphi = 0$ называется _____.

Правильный ответ: гармонической

Компетенции: ПК-1

3. Результатом вычисления операции над векторным полем, называемой _____, является скалярное поле, характеризующее плотность источников исходного векторного поля.

Правильный ответ: дивергенцией

Компетенции: ПК-1

4. Результатом вычисления операции над векторным полем, называемой _____, является векторное поле, характеризующее плотность завихрений исходного векторного поля.

Правильный ответ: ротором

Компетенции: ПК-1

5. Теорема _____ связывает между собой значение поверхностного интеграла второго рода и значение криволинейного интеграла второго рода.

Правильный ответ: Стокса

Компетенции: ПК-1

Задания открытого типа с кратким свободным ответом

1. Вычислить $\text{grad } x^2 y^3 z$.

Правильный ответ: $2xy^3z\vec{i} + 3x^2y^2z\vec{j} + x^2y^3\vec{k}$

Компетенции: ПК-1

2. Вычислить $\text{div}(xy^3z\vec{i} + x^2y^2z\vec{j} - x^2y^3z^5\vec{k})$.

Правильный ответ: $y^3z + 2x^2yz - 5x^2y^3z^4$

Компетенции: ПК-1

3. Вычислить $\text{rot}(y\vec{i} - x\vec{j})$.

Правильный ответ: $-2\vec{k}$

Компетенции: ПК-1

4. Как называется теорема, которая связывает интеграл по объему от дивергенции векторного поля с потоком этого поля через поверхность, ограничивающую данный объем?

Правильный ответ: Гаусса-Остроградского

Компетенции: ПК-1

5. Чему равна валентность тензора R_{ij}^k ?

Правильный ответ: 3

Компетенции: ПК-1

Задания открытого типа с развернутым ответом

1. Вычислить ротор поля скоростей абсолютно твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки с угловой скоростью $\vec{\omega}$.

Привести расширенное решение.

Время выполнения – 30 мин.

Ожидаемый результат:

Найдем выражение для поля скоростей в зависимости от положения точки $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$:

$$\begin{aligned}\vec{u}(\vec{r}) = \vec{\omega} \times \vec{r} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \omega_y & \omega_z \\ y & z \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} \omega_x & \omega_z \\ x & z \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} \omega_x & \omega_y \\ x & y \end{vmatrix} \vec{k} = \\ &= (\omega_y z - \omega_z y) \vec{i} + (\omega_z x - \omega_x z) \vec{j} + (\omega_x y - \omega_y x) \vec{k}.\end{aligned}$$

Вычислим ротор:

$$\begin{aligned}\text{rot } \vec{u}(\vec{r}) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \omega_y z - \omega_z y & \omega_z x - \omega_x z & \omega_x y - \omega_y x \end{vmatrix} = \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial y} (\omega_x y - \omega_y x) - \frac{\partial}{\partial z} (\omega_z x - \omega_x z) \right) \vec{i} + \\ &+ \left(\frac{\partial}{\partial z} (\omega_y z - \omega_z y) - \frac{\partial}{\partial x} (\omega_x y - \omega_y x) \right) \vec{j} + \\ &+ \left(\frac{\partial}{\partial x} (\omega_z x - \omega_x z) - \frac{\partial}{\partial y} (\omega_y z - \omega_z y) \right) \vec{k} = \\ &= (\omega_x + \omega_x) \vec{i} + (\omega_y + \omega_y) \vec{j} + (\omega_z + \omega_z) \vec{k} = 2\vec{\omega}\end{aligned}$$

Правильный ответ: $2\vec{\omega}$

Компетенции: ПК-1

2. Точечный заряд q находится в точке $\vec{r}_0$. Вычислить дивергенцию электрического поля этого заряда в пустой части пространства.

Привести расширенное решение.

Время выполнения – 30 мин.

Ожидаемый результат:

Решение:

Согласно закону Кулона

$$|\vec{E}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^2},$$

где $R = |\vec{r} - \vec{r}_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$, $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ – радиус-вектор точки, в которой рассчитывается поле.

Электрическое поле заряда направлено от точки $\vec{r}_0$ в точку $\vec{r}$. Единичный вектор этого направления может быть вычислен как

$$\vec{e} = \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|}.$$

Следовательно, закон Кулона можно записать в векторном виде

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^2} \vec{e} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3}.$$

Составляющие этого поля имеют вид:

$$E_x(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x - x_0}{\left[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2\right]^{3/2}};$$

$$E_y(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{y - y_0}{\left[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2\right]^{3/2}};$$

$$E_z(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{z - z_0}{\left[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2\right]^{3/2}}.$$

Вычислим частные производные:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_x}{\partial x} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\left[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2\right]^{3/2}} - \\ &\quad - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{3(x - x_0)^2}{\left[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2\right]^{5/2}}; \\ \frac{\partial E_y}{\partial y} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\left[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2\right]^{3/2}} - \\ &\quad - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{3(y - y_0)^2}{\left[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2\right]^{5/2}}; \\ \frac{\partial E_z}{\partial z} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\left[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2\right]^{3/2}} - \\ &\quad - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{3(z - z_0)^2}{\left[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2\right]^{5/2}}. \end{aligned}$$

Вычислим дивергенцию при $\vec{r} \neq \vec{r}_0$:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{3}{\left[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2\right]^{3/2}} - \\ &\quad - \frac{3q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}{\left[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2\right]^{5/2}} = \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{3}{\left[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2\right]^{3/2}} - \\ &\quad - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{3}{\left[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2\right]^{3/2}} = 0. \end{aligned}$$

Правильный ответ: 0

Компетенции: ПК-1

Экспертное заключение

Представленный комплект оценочных материалов по дисциплине «Векторный и тензорный анализ» соответствует требованиям ФГОС ВО.

Предлагаемые оценочные материалы адекватны целям и задачам реализации основной профессиональной образовательной программы по направлению подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика.

Виды оценочных средств, включенные в представленный фонд, отвечают основным принципам формирования ФОС.

Разработанные и представленные для экспертизы оценочные материалы рекомендуются к использованию в процессе подготовки обучающихся по указанному направлению.

Председатель учебно-методической комиссии
института компьютерных систем и
информационных технологий

Ветрова Н. Н.

Лист изменений и дополнений

№ п/п	Виды дополнений и изменений	Дата и номер протокола заседания кафедры (кафедр), на котором были рассмотрены и одобрены изменения и дополнения	Подпись (с расшифровкой) заведующего кафедрой (заведующих кафедрами)
1.	Дополнен комплектом оценочных материалов	протокол заседания кафедры прикладной математики № <u>8</u> от <u>24.02.2025</u>	 В.В. Малый