Комплект оценочных материалов по дисциплине «Дифференциальные уравнения»

Задания закрытого типа

Задания закрытого типа на выбор правильного ответа

1. Выберите один правильный ответ

Система дифференциальных уравнений первого порядка называется системой в нормальной форме (нормальной системой), если:

А) число уравнений меньше числа неизвестных

Б) число уравнений равно числу неизвестных

В) число уравнений больше числа неизвестных

Г) число уравнений больше или равно числу неизвестных

Правильный ответ: Б

Компетенции (индикаторы): ОПК-1, ОПК-5.

2. Выберите один правильный ответ

Если существует $\delta > 0$ такое, что из совокупности неравенств

$$|x_i(t_0) - \varphi_i(t_0)| < \delta$$

следует, что $\lim\limits_{t\to+\infty} |x_i(t_0) - \varphi_i(t_0)| = 0$, $i = 1, \dots n$, то решение $X = \Phi(t)$ системы дифференциальных уравнений $\frac{dX}{dt} = F(X, t)$ называется:

А) неустойчивым

Б) касательно устойчивым по Ляпунову

В) асимптотически устойчивым по Ляпунову

Г) устойчивым по Ляпунову

Правильный ответ: В

Компетенции (индикаторы): ОПК-1, ОПК-5.

3. Выберите один правильный ответ

Метод линейной интерполяции решения краевой задачи для линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка также имеет название:

А) метод хорд

Б) метод касательных

В) метод стрельбы

Г) метод суперпозиции

Правильный ответ: А

Компетенции (индикаторы): ОПК-1, ОПК-5.

4. Выберите один правильный ответ

При решении краевых задач методом конечных разностей область непрерывного изменения аргумента (например, отрезок) заменяется дискретным множеством точек, называемых:

А) конечно-разностными соотношениями

Б) узлами

В) сеточными функциями

Г) разностными уравнениями

Правильный ответ: Б

Компетенции (индикаторы): ОПК-1, ОПК-5.

5. Выберите один правильный ответ

Если в дифференциальном уравнении в частных производных первого порядка

$$F\left(x_1, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0$$

функция F является линейной относительно всех производных неизвестной функции $\frac{\partial u}{\partial x_i}$, то такое уравнение называется:

А) квазилинейным

Б) однородным

В) уравнением Хопфа

Г) квазиоднородным

Правильный ответ: А

Компетенции (индикаторы): ОПК-1, ОПК-5.

Задания закрытого типа на установление соответствия

1. Установите правильное соответствие. Каждому элементу левого столбца соответствует только один элемент правого столбца.

	Понятие		Определение понятия
1)	Решение системы дифференциальных уравнений	А)	Наивысший порядок производной, входящей в уравнения системы
2)	Порядок системы дифференциальных уравнений	Б)	Дифференциальное уравнение, в котором неизвестная функция зависит только от одной переменной
3)	Обыкновенное дифференциальное уравнение	В)	Дифференциальное уравнение, в котором неизвестная функция зависит от нескольких переменных

4)	Дифференциальное уравнение в частных производных	Г)	Набор функций, превращающий все уравнения системы в тождества

Правильный ответ:

1	2	3	4
Г	А	Б	В

Компетенции (индикаторы): ОПК-1, ОПК-5.

2. Установите правильное соответствие. Каждому элементу левого столбца соответствует только один элемент правого столбца.

	Математическое выражение		Значение выражения
1)	$X(t_0) = X_0$	А)	Общее решение системы дифференциальных уравнений
2)	$\dfrac{dX}{dt} = F(X,t)$	Б)	Начальные условия
3)	$x_2 = \varphi_2(t)$	В)	Частное решение системы дифференциальных уравнений
4)	$X = \{\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)\}$	Г)	Система дифференциальных уравнений в компактном виде

Правильный ответ:

1	2	3	4
Б	Г	В	А

Компетенции (индикаторы): ОПК-1, ОПК-5.

3. Установите правильное соответствие. Каждому элементу левого столбца соответствует только один элемент правого столбца.

	Корни характеристического уравнения для линейного дифференциального уравнения порядка n с постоянными коэффициентами		Фундаментальная система решений линейного уравнения
1)	n различных вещественных корней $k_1, \dots, k_n$	А)	$y_i = c_i \cdot e^{k_i x},\ i = 1 \dots n$
2)	Все корни различные, среди них имеются комплексные и вещественные	Б)	$y_i = x^s \cdot e^{k_i x}, \quad (0 \le s \le m_i - 1)$, m_i – кратность корня k_i, $i = 1 \dots n$
3)	Корни вещественные, среди них имеются кратные	В)	$y_i = x^s e^{\alpha x}\left(c_{1_i} cos\beta x + c_{2_i} sin\beta x\right)$, $0 \le s \le m_i - 1,\ m_i$ – кратность корня k_i, $i = 1 \dots n$
4)	Корни комплексные, среди них имеются кратные	Г)	$y_i = x^s \cdot e^{k_i x} +$ $x^s e^{\alpha x}\left(c_{1_j} cos\beta x + c_{2_j} sin\beta x\right)$,

			$0 \le s \le m_{i,j} - 1$, $m_{i,j}$ – кратность корня $k_{i,j}$, $i, j = 1 \dots n$

Правильный ответ:

1	2	3	4
А	Г	Б	В

Компетенции (индикаторы): ОПК-1, ОПК-5.

4. Установите правильное соответствие. Каждому элементу левого столбца соответствует только один элемент правого столбца.

	Элементы теории нормальной системы дифференциальных уравнений		Механическая интерпретация элементов
1)	$\begin{cases} x'_t = f_1(t, x, y, z) \\ y'_t = f_2(t, x, y, z) \\ z'_t = f_3(t, x, y, z) \end{cases}$	А)	Параметрическое уравнение траектории движения
2)	$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$	Б)	Время
3)	x, y, z	В)	Значение проекции скорости движения точки в любой момент времени
4)	t	Г)	Координаты движения точки

Правильный ответ:

1	2	3	4
В	А	Г	Б

Компетенции (индикаторы): ОПК-1, ОПК-5.

5. Установите правильное соответствие. Каждому элементу левого столбца соответствует только один элемент правого столбца.

	Система дифференциальных уравнений		Характеристическое уравнение
1)	$\begin{cases} x' = x - y \\ y' = -4x + y \end{cases}$	А)	$\begin{vmatrix} 2-k & -1 \\ 1 & 5-k \end{vmatrix} = 0$
2)	$\begin{cases} x' = 2x - y \\ y' = x + 5y \end{cases}$	Б)	$\begin{vmatrix} 1-k & -3 \\ 7 & 1-k \end{vmatrix} = 0$
3)	$\begin{cases} x' = x - 3y \\ y' = 7x + y \end{cases}$	В)	$\begin{vmatrix} -1-k & 1 \\ 4 & 8-k \end{vmatrix} = 0$
4)	$\begin{cases} x' = -x + y \\ y' = 4x + 8y \end{cases}$	Г)	$\begin{vmatrix} 1-k & -1 \\ -4 & 1-k \end{vmatrix} = 0$

Правильный ответ:

1	2	3	4
Г	А	Б	В

Компетенции (индикаторы): ОПК-1, ОПК-5.

Задания закрытого типа на установление правильной последовательности

1. Расположите системы дифференциальных уравнений в порядке возрастания порядка их характеристического уравнения:

А) $\begin{cases} x' = x - y + 7z + 2g - h \\ y' = 3x + y - 3z - g + 2h \\ z' = 8x - y + 5z + 3g + h \\ g' = x + 2y + 5z + 9g - 4h \\ h' = 3x - 2y + 7z + 8g - h \end{cases}$

Б) $\begin{cases} x' = 4x - 3y + 3z \\ y' = 2x + y - z \\ z' = 2x + y + 5z \end{cases}$

В) $\begin{cases} x' = x - y + 7z + 2g \\ y' = 3x + y - 3z - g \\ z' = 8x - y + 5z + 3g \\ g' = x + 2y + z + 9g \end{cases}$

Г) $\begin{cases} x' = 17x + y \\ y' = x + 6y \end{cases}$

Правильный ответ: Г, Б, В, А

Компетенции (индикаторы): ОПК-1, ОПК-5.

2. Расположите действия в порядке их выполнения при решении системы линейных дифференциальных уравнений $\begin{cases} x'_t = f_1(x,y,t) \\ y'_t = f_2(x,y,t) \end{cases}$ методом исключения:

А) Из любого уравнения выразить одну из переменных, например, $x = x(t,y)$ и продифференцировать обе части полученного уравнения по t.

Б) Решить дифференциальное уравнение второго порядка относительно функции $y(t)$ и найти y'_t

В) Подставить $x(t,y)$ и $x'_t(t,y)$ во второе уравнение системы

Г) Найти $x = x(t)$

Правильный ответ: А, В, Б, Г

Компетенции (индикаторы): ОПК-1, ОПК-5.

3. Дано дифференциальное уравнение $y' = x^2 + e^{\sqrt[3]{xy}}$ с начальными условиями $y_0(x_0) = y(0) = 1$. Отрезок интегрирования $[0;1]$ разбивается на четыре части с шагом $h = 0{,}25$. Расположите значения y_i, $i = 1, \dots 4$ в порядке

возрастания их значений при решении заданного уравнения численным методом Эйлера:

А) y_1

Б) y_2

В) y_3

Г) y_4

Правильный ответ: А, Б, В, Г

Компетенции (индикаторы): ОПК-1, ОПК-5.

4. Расположите действия в порядке их выполнения при решении дифференциального уравнения в виде степенного ряда способом сравнения коэффициентов:

А) Записать решение в виде степенного ряда с неопределенными коэффициентами $y = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + \cdots$

Б) Подставить в дифференциальное уравнение вместо функции y и ее производных соответствующие степенные ряды, а также вместо коэффициентов и правой части $F(x)$ записать их разложения в степенные ряды по степеням $x - x_0$ и произвести действия над рядами

В) Из начальных условий определить значения коэффициентов $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$

Г) Приравнять коэффициенты при одинаковых степенях $x - x_0$, откуда находим неизвестные коэффициенты искомого ряда.

Правильный ответ: А, В, Б, Г

Компетенции (индикаторы): ОПК-1, ОПК-5.

Задания открытого типа

Задания открытого типа на дополнение

1. Напишите пропущенное слово (словосочетание).

________________ – это определитель, применяемый при решении дифференциальных уравнений, первая строка которого образована искомыми функциями, а последующие строки – производными от функций предыдущей строки.

Правильный ответ: определитель Вронского.

Компетенции (индикаторы): ОПК-1, ОПК-5.

2. Напишите пропущенное слово (словосочетание).

Численное интегрирование дифференциальных уравнений позволяет вместо нахождения функции $y = F(x)$ получить таблицу значений этой функции для заданной последовательности аргументов, при этом величина $h = x_k - x_{k-1}$ называется ________________ интегрирования.

Правильный ответ: шагом.

Компетенции (индикаторы): ОПК-1, ОПК-5.

3. Напишите пропущенное слово (словосочетание).

Точка ________________ – это точка, в которой правая часть системы дифференциальных уравнений обращается в ноль.

Правильный ответ: покоя.

Компетенции (индикаторы): ОПК-1, ОПК-5.

4. Напишите пропущенное слово (словосочетание).

_________________ задачи – это задачи, в которых из некоторого класса функций, определённых в данной области, требуется выделить ту, которая удовлетворяет заданным на границе (крае) этой области условиям.

Правильный ответ: краевые.

Компетенции (индикаторы): ОПК-1, ОПК-5.

Задания открытого типа с кратким свободным ответом

1. Найти интегральную поверхность уравнения

$$x\frac{\partial z}{\partial y} - y\frac{\partial z}{\partial x} = 0,$$

проходящую через кривую $\begin{cases} x = 0 \\ z = y^2. \end{cases}$ *(Ответ запишите в виде названия поверхности)*.

Правильный ответ: параболоид.

Компетенции (индикаторы): ОПК-1, ОПК-5.

2. Как называется метод, который сводит решение краевой задачи для дифференциального уравнения к решению системы алгебраических уравнений относительно значений искомой функции на заданном множестве точек, что достигается путем замены производных, входящих в дифференциальное уравнение, их конечно-разностными аппроксимациями? *(Ответ запишите двумя словами)*

Правильный ответ: конечных разностей.

Компетенции (индикаторы): ОПК-1, ОПК-5.

3. Как называется точка покоя системы дифференциальных уравнений, если её собственные числа – вещественные числа разного знака? *(Ответ запишите, одним словом)*

Правильный ответ: седло.

Компетенции (индикаторы): ОПК-1, ОПК-5.

4. Как иначе называется автономная система дифференциальных уравнений. *(Ответ запишите одним прилагательным)*

Правильный ответ: стационарная.

Компетенции (индикаторы): ОПК-1, ОПК-5.

Задания открытого типа с развернутым ответом

1. Найти фундаментальную систему решений для системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = 3y_1 - y_2 + y_3 \\ \dfrac{dy_2}{dt} = y_1 + y_2 + y_3 \\ \dfrac{dy_3}{dt} = 4y_1 - y_2 + 4y_3 \end{cases}$$

Привести расширенное решение.

Время выполнения – 40 мин.

Ожидаемый результат:

1. Матрица коэффициентов:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Запишем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 3-k & -1 & 1 \\ 1 & 1-k & 1 \\ 4 & -1 & 4-k \end{vmatrix} = 0$$

$$(3-k)(1-k)(4-k) - 4 - 1 - 4(1-k) + (3-k) + (4-k) = 0$$

$$(3-4k+k^2)(4-k) - 5 - 4 + 4k + 3 - k + 4 - k = 0$$

$$12 - 16k + 4k^2 - 3k + 4k^2 - k^3 + 2k - 2 = 0$$

$$-k^3 + 8k^2 - 17k + 10 = 0; \quad k^3 - 8k^2 + 17k - 10 = 0$$

Корни характеристического уравнения: $k_1 = 1, k_2 = 2, k_3 = 5.$

2. Для $k_1 = 1$ получим систему уравнений:

$$\begin{cases} 2p_1 - p_2 + p_3 = 0 \\ p_1 + p_3 = 0 \\ 4p_1 - p_2 + 3p_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} p_1 = -p_3 \\ -2p_3 - p_2 + p_3 = 0 \\ -4p_3 - p_2 + 3p_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_1 = -p_3 \\ -p_3 - p_2 = 0 \\ -p_3 - p_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} p_1 = -p_3 \\ p_2 = -p_3 \end{cases}$$

Для $k_1 = 1$ собственный вектор имеет вид $(1,1,-1)$

$y_{11} = e^t, y_{21} = e^t, y_{31} = e^t.$

Для $k_2 = 2$ получим систему уравнений:

$$\begin{cases} p_1 - p_2 + p_3 = 0 \\ p_1 - p_2 + p_3 = 0 \\ 4p_1 - p_2 + 2p_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} p_1 - p_2 + p_3 = 0 \\ 4p_1 - p_2 + 2p_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3p_1 + p_3 = 0 \\ p_2 = p_1 + p_3 \end{cases} \quad \begin{cases} p_3 = -3p_1 \\ p_2 = -2p_1 \end{cases}$$

Для $k_2 = 2$ собственный вектор имеет вид $(-1,2,3)$

$y_{12} = -e^{2t}, y_{22} = 2e^{2t}, y_{32} = 3e^{2t}.$

Для $k_3 = 5$ получим систему уравнений:

$$\begin{cases} -2p_1 - p_2 + p_3 = 0 \\ p_1 - 4p_2 + p_3 = 0 \\ 4p_1 - p_2 - p_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -8p_2 + 2p_3 - p_2 + p_3 = 0 \\ p_1 = 4p_2 - p_3 \\ 16p_2 - 4p_3 - p_2 - p_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -9p_2 + 3p_3 = 0 \\ p_1 = 4p_2 - p_3 \\ 15p_2 - 5p_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -3p_2 + p_3 = 0 \\ p_1 = 4p_2 - p_3 \\ 3p_2 - p_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} p_3 = 3p_2 \\ p_1 = 4p_2 - p_3 \end{cases}$$

Для $k_3 = 5$ собственный вектор имеет вид (5,5,15)

$y_{31} = 5e^{5t}, y_{32} = 5e^{5t}, y_{33} = 15e^{5t}$.

3. Фундаментальная система решений представляется в виде:

$$\begin{cases} y_1 = c_1 y_{11} + c_2 y_{12} + c_3 y_{13} \\ y_2 = c_1 y_{21} + c_2 y_{22} + c_3 y_{23} \\ y_3 = c_1 y_{31} + c_2 y_{32} + c_3 y_{33} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} y_1 = c_1 e^t - c_2 e^{2t} + 5c_3 e^{5t} \\ y_2 = c_1 e^t + 2c_2 e^{2t} + 5c_3 e^{5t} \\ y_3 = -c_1 e^t + 3c_2 e^{2t} + 15c_3 e^{5t} \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} y_1 = c_1 e^t - c_2 e^{2t} + 5c_3 e^{5t} \\ y_2 = c_1 e^t + 2c_2 e^{2t} + 5c_3 e^{5t} \\ y_3 = -c_1 e^t + 3c_2 e^{2t} + 15c_3 e^{5t} \end{cases}$.

Критерии оценивания:

– составление и решение характеристического уравнения;

– нахождение собственных векторов;

– нахождение фундаментальной системы решений.

Компетенции (индикаторы): ОПК-1, ОПК-5.

2. Исследовать решение системы на устойчивость:

$$\begin{cases} x' = \ln(2 - y^2) \\ y' = e^x - 1 \end{cases}$$

Привести расширенное решение.

Время выполнения – 35 мин.

Ожидаемый результат:

1. Ищем точки покоя:

$$\begin{cases} \ln(2 - y^2) = 0 \\ e^x - 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = \pm 1 \end{cases}$$

Таким образом, имеем две точки покоя системы.

2. Проанализируем первую из них $x_0 = 0$, $y_0 = 1$. Обозначим $u = x$, $v = y - 1$.

$$\ln(2 - y^2) = 2v + o(\sqrt{u^2 + v^2})$$

$$e^x - 1 = u + o(\sqrt{u^2 + v^2})$$

Находим собственные значения для следующей системы:

$$\begin{cases} u' = -2\text{v} \\ v' = u \end{cases}$$

Собственные значения определяем из уравнения:

$$\begin{vmatrix} -k & -2 \\ 1 & -k \end{vmatrix} = 0, \quad k_{1,2} = \pm i\sqrt{2}$$

То есть точка $(0,1)$ является центром – устойчивое положение равновесия, но не асимптотически.

3. Рассмотрим вторую точку $x_0 = 0, y_0 = -1$.

Обозначим $u = x, v = y + 1$.

$$\ln(2 - y^2) = 2v + o(\sqrt{u^2 + v^2})$$

$$e^x - 1 = u + o(\sqrt{u^2 + v^2})$$

Находим собственные значения для следующей системы:

$$\begin{cases} u' = 2\text{v} \\ v' = u \end{cases}$$

Собственные значения определяем из уравнения:

$$\begin{vmatrix} -k & 2 \\ 1 & -k \end{vmatrix} = 0, \quad k_{1,2} = \pm\sqrt{2}$$

То есть точка $(0,-1)$ является седлом (неустойчивое положение равновесия).

Ответ: $(x_0, y_0) = (0,1)$ – центр, $(x_0, y_0) = (0,-1)$ –седло.

Критерии оценивания:

– нахождение точек покоя;

– нахождение собственных значений системы;

– формулирование выводов об устойчивости точек покоя.

Критерии оценивания:

– нахождение точек покоя;

– нахождение собственных значений системы;

– формулирование выводов об устойчивости точек покоя.

Компетенции (индикаторы): ОПК-1, ОПК-5.

Экспертное заключение

Представленный комплект оценочных материалов по дисциплине «Дифференциальные уравнения» соответствует требованиям ФГОС ВО.

Предлагаемые оценочные материалы адекватны целям и задачам реализации основной профессиональной образовательной программы по направлению подготовки 01.03.03 Механика и математическое моделирование.

Виды оценочных средств, включенные в представленный фонд, отвечают основным принципам формирования ФОС.

Разработанные и представленные для экспертизы оценочные материалы рекомендуются к использованию в процессе подготовки обучающихся по указанному направлению.

Председатель учебно-методической комиссии
института компьютерных систем и
информационных технологий Ветрова Н. Н.

Лист изменений и дополнений

№ п/п	Виды дополнений и изменений	Дата и номер протокола заседания кафедры (кафедр), на котором были рассмотрены и одобрены изменения и дополнения	Подпись (с расшифровкой) заведующего кафедрой (заведующих кафедрами)
1.	Дополнен комплектом оценочных материалов	протокол заседания кафедры прикладной математики № 8 от 24.01.2025	В.В. Малый