# Комплект оценочных материалов по дисциплине «Функциональный анализ»

### Задания закрытого типа

#### Задания закрытого типа на выбор правильного ответа

1. Выберите один правильный ответ

Функции заданы на числовой прямой. Какие из них удовлетворяют аксиомам метрики?

А) 

Б) ;

В) ;

Правильный ответ: А

Компетенции (индикаторы): ОПК-1, ОПК-5.

1. Выберите один правильный ответ

Расстояние между функциями  и  в пространстве

 равно:

А) 10;

Б) 4;

В) 2;

Правильный ответ: А

Компетенции (индикаторы): ОПК-1, ОПК-5.

3. Выберите один правильный ответ

Расстояние между функциями  и  в пространстве  равно:

А) 4

Б) 6

В) 5

Правильный ответ: Б

Компетенции (индикаторы): ОПК-1, ОПК-5.

4. Выберите один правильный ответ

Укажите правильное определение метрики в нормированном пространстве

А) 

Б) 

В) 

Правильный ответ: В

Компетенции (индикаторы): ОПК-1, ОПК-5.

5. Выберите один правильный ответ

Укажите правильное определение нормы в евклидовом пространстве.

А) 

Б) 

В) 

Правильный ответ: Б

Компетенции (индикаторы): ОПК-1, ОПК-5.

6. Выберите один правильный ответ

Для линейного функционала  множество  является

А) образом

Б) фактор-пространством

В) ядром

Правильный ответ: В

Компетенции (индикаторы): ОПК-1, ОПК-5.

7. Выберите один правильный ответ

Пусть . Угол между  и  равен

А) 

Б) 

В) 

Правильный ответ: В

Компетенции (индикаторы): ОПК-1, ОПК-5.

8. Выберите один правильный ответ

Пусть . Угол между  и  равен

А) 

Б) 

В) 0

Правильный ответ: Б

Компетенции (индикаторы): ОПК-1, ОПК-5.

9. Выберите все правильные варианты ответов

Укажите множества, которые образуют в пространстве  замкнутые подпространства.

А). монотонные функции

Б) четные функции

В) многочлены

Г) многочлены степени не выше , дополненные нулевым многочленом

Правильный ответ: Б, Г,

Компетенции (индикаторы): ОПК-1, ОПК-5.

10. Выберите все правильные варианты ответов

Укажите те подмножества числовой прямой, которые всегда измеримы по Лебегу

А) открытые

Б) ограниченные

В) несчетные

Г) замкнутые

Правильный ответ: А, Г

Компетенции (индикаторы): ОПК-1, ОПК-5.

11. Выберите все правильные варианты ответов

А) в сепарабельном евклидовом пространстве существует ортонормированный базис

Б) ряд Фурье любого элемента всегда сходится к этому же элементу

В) для любой ортонормированной системы всегда справедливо неравенство Бесселя

Г) для любой ортонормированной системы всегда справедливо равенство Парсеваля

Правильный ответ: А, В.

Компетенции (индикаторы): ОПК-1, ОПК-5.

#### Задания закрытого типа на установление соответствия

1. Установите правильное соответствие. Каждому элементу левого столбца соответствует только один элемент правого столбца.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 1) |  | А) |  |
| 2) |  | Б) |  |
| 3) |  | В) |  |

Правильный ответ:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1 | 2 | 3 |
| Б | А | В |

Компетенции (индикаторы): ОПК-1, ОПК-5.

2. Установите правильное соответствие. Каждому элементу левого столбца соответствует только один элемент правого столбца.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 1) | Интегральное уравнение Фредгольма второго рода | А) |  |
| 2) | Интегральное уравнение Фредгольма с вырожденным ядром | Б) |  |
| 3) | Интегральное уравнение Вольтера второго рода | В) |  |

Правильный ответ:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1 | 2 | 3 |
| Б | В | А |

Компетенции (индикаторы): ОПК-1, ОПК-5.

3. Установите правильное соответствие. Каждому элементу левого столбца соответствует только один элемент правого столбца.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 1) | Семейство вещественных функций , где ,  ‑ некоторое множество индексов,  ‑ произвольное множество равномерно ограничено | А) | существует такое , что для любой функции  и любых точек  из условия   следует условие . |
| 2) | Множество  раностепенно непрерывно | Б) | В любом покрытии  открытыми множествами найдётся конечное [подпокрытие](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D0%BE%D0%B4%D0%BF%D0%BE%D0%BA%D1%80%D1%8B%D1%82%D0%B8%D0%B5). |
| 3) | Множество  предкомпактно | В) |  |

Правильный ответ:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1 | 2 | 3 |
| В | А | Б |

Компетенции (индикаторы): ОПК-1, ОПК-5.

#### Задания закрытого типа на установление правильной последовательности

1. Рассматриваются следующие пространства:

А) гильбертово пространство

Б) банахово пространство

В) метрическое пространство

Расположить в порядке убывания общности

Правильный ответ: В, Б, А,

Компетенции (индикаторы): ОПК-1, ОПК-5.

2. Рассматривается функция, обладающая свойством:

A)  непрерывна на ;

Б)  равномерно непрерывна на ;

В)  непрерывно дифференцируема на .

Расположить в порядке убывания общности

Правильный ответ: А, В, Б,

Компетенции (индикаторы): ОПК-1, ОПК-5.

### Задания открытого типа

#### Задания открытого типа на дополнение

1. Напишите пропущенное слово (словосочетание).

Гильбертово пространство – это евклидово пространство \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_, относительно нормы, порожденной скалярным произведением.

Правильный ответ: полное

Компетенции (индикаторы): ОПК-1, ОПК-5.

1. Напишите пропущенное слово (словосочетание).

Пространство всех непрерывных линейных функционалов над нормированным пространством называется \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Правильный ответ: сопряженным пространством

Компетенции (индикаторы): ОПК-1, ОПК-5.

1. Напишите пропущенное слово (словосочетание).

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ пространство – это полное нормированное пространство.

Правильный ответ: Банахово

Компетенции (индикаторы): ОПК-1, ОПК-5.

1. Напишите пропущенное слово (словосочетание).

Линейный оператор ограничен тогда и только тогда, когда он \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Правильный ответ: непрерывен

Компетенции (индикаторы): ОПК-1, ОПК-5.

5. Напишите пропущенное слово (словосочетание).

Кольцо множеств с единицей называется \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Правильный ответ: алгеброй множеств

Компетенции (индикаторы): ОПК-1, ОПК-5.

1. Напишите пропущенное слово (словосочетание).

Измеримая функция, множество значений которой не более чем счетно называется \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Правильный ответ: простой функцией

Компетенции (индикаторы): ОПК-1, ОПК-5.

#### Задания открытого типа с кратким свободным ответом

1. Найти норму элемента  в .

Правильный ответ: .

Компетенции (индикаторы): ОПК-1, ОПК-5.

2. Найти неподвижную точку отображения  числовой прямой в себя.

Правильный ответ: .

Компетенции (индикаторы): ОПК-1, ОПК-5.

3. Линейный функционал, определенный в пространстве , в точках (1,1) и (1,0) принимает значение 2 и 5 соответственно. Найдите его значение в точке (3,4).

Правильный ответ: 3.

Компетенции (индикаторы): ОПК-1, ОПК-5.

4. Найти неподвижную точку отображения , пространства  в себя.

Правильный ответ: .

Компетенции

5. Найти норму линейного функционала , 

Правильный ответ 

Компетенции (индикаторы): ОПК-1, ОПК-5.

6. Найти норму элемента (3; -5; -3) в пространстве 

Правильный ответ: .

Компетенции (индикаторы): ОПК-1, ОПК-5.

#### Задания открытого типа с развернутым ответом

1. Решить интегральное уравнение

.

Привести расширенное решение.

Время выполнения – 30 мин.

Ожидаемый результат: Данное уравнение является уравнением Фредгольма второго рода с вырожденным ядром. Запишем его в следующем виде:

.

Введем обозначения

, (1)

где  ‑ неизвестные постоянные. Тогда исходное уравнение примет вид:

. (2)

Подставляя выражение (2) в равенства (1), получим

,

,

.

Или

,

,

.

Вычисляя входящие в эти уравнения интегралы, мы получим систему алгебраических уравнений для нахождения неизвестных :



Определитель этой системы



Система имеет единственное решение

.

Подставляя найденные значения  в (2) получим решение данного интегрального уравнения:



Ответ: .

Критерии оценивания:

– интегральные уравнения Фредгольма, вырожденное ядро, единственность решения системы линейных уравнений.

Компетенции (индикаторы): ОПК-1, ОПК-5.

2. Доказать что для того чтобы элемент  гильбертового пространства  был ортогонален подпространству , необходимо и достаточно чтобы для любого элемента  имело место неравенство .

Привести расширенное решение.

Время выполнения – 30 мин.

Ожидаемый результат:

Необходимость. Поскольку , то для всякого  имеем

,

Откуда следует требуемое утверждение.

Достаточность. Для всякого  имеем разложение . По условию , . Покажем, что . Имеем  для всякого . Тогда для  получаем , т.е. . Поскольку , то из предыдущего неравенства следует . Значит, , что дает , а, значит, и , что завершает доказательство.

Критерии оценивания:

– ортогональность элемента гильбертова пространства подпространству, свойства скалярного произведения

Компетенции (индикаторы): ОПК-1, ОПК-5.