Комплект оценочных материалов по дисциплине
«Численные методы»

Задания закрытого типа

Задания закрытого типа на выбор правильного ответа

Выберите один правильный ответ

1. Значащими цифрами считаются …
А) все цифры данного числа, приведенные в его записи
Б) все цифры данного числа, начиная с первой ненулевой цифры
В) все цифры данного числа, не считая нулей в конце записи
Г) все цифры данного числа, находящиеся перед десятичным разделителем (запятой)
Правильный ответ: Б
Компетенции (индикаторы): ОПК-1, ОПК-2.

2. Задача вычисления $y = A(x)$ называется корректно поставленной, если для любых входных данных из некоторого класса решение задачи существует, единственно и устойчиво по входным данным
А) верно
Б) неверно
Правильный ответ: А
Компетенции (индикаторы): ОПК-1, ОПК-2.

3. Отделите корни уравнения $x^2 - \sin x - 1 = 0$ и укажите отрезки, их содержащие
А) $[-\pi; -1]$ и $[1;\ \pi]$
Б) $[-\pi; 0]$ и $[0;\ 1]$
В) $[-1; 0]$ и $[1;\ 2]$
Г) $[-2; -1]$ и $[0; 1]$
Правильный ответ: В
Компетенции (индикаторы): ОПК-1, ОПК-2.

4. В случае линейной интерполяции интерполирующая функция строится в виде
А) прямых, соединяющих значения интерполируемой функции на плоскости
Б) линий, проходящих через узлы интерполяции параллельно оси OY
В) линейной комбинации некоторых базисных функций $\{\Phi_k(x)\}$
Г) линейно-независимой функции
Правильный ответ: В
Компетенции (индикаторы): ОПК-1, ОПК-2.

5. Для разрешимости задачи линейной интерполяции необходимо и достаточно чтобы система функций $\{\Phi_k(x)\}$ образовывала на $[a, b]$ чебышевскую систему интерполяционных функций
А) верно
Б) неверно
Правильный ответ: А
Компетенции (индикаторы): ОПК-1, ОПК-2.

6. Квадратурная формула Симпсона (парабол) имеет степень
А) n
Б) 2
В) 3
Г) n+1
Правильный ответ: В
Компетенции (индикаторы): ОПК-1, ОПК-2.

Выберите все правильные варианты ответов

7. К численным методам решения обыкновенных дифференциальных уравнений относятся:
А) метод Филона
Б) метод Эйлера
В) метод Симпсона
Г) метод Адамса
Д) метод Рунге-Кутта
Е) метод Фибоначчи
Правильные ответы: Б, Г, Д
Компетенции (индикаторы): ОПК-1, ОПК-2.

8. К методам уточнения корней уравнения до заданной степени точности относятся:
А) метод Гаусса
Б) метод половинного деления
В) метод Якоби
Г) метод хорд
Д) метод касательных
Е) метод Фибоначчи
Правильные ответы: Б, Г, Д
Компетенции (индикаторы): ОПК-1, ОПК-2.

Задания закрытого типа на установление соответствия

Установите правильное соответствие.

Каждому элементу левого столбца соответствует только один элемент правого столбца.

1. Установите соответствие предложенного описания этапов (или их частей) математического моделирования их названиям

Описание этапа (части)	Название этапа
1) Сопоставление полученного результата с имеющимися данными физического эксперимента	А) Формулировка математической модели
2) Математическая модель изучаемого явления должна охватывать важнейшие для рассматриваемой задачи стороны процесса, его существенные характеристики и формализованные связи	Б) Написание программного кода, реализующего численный метод
3) Для наиболее точных и сложных моделей основными методами решения являются численные методы	В) Проведение математического исследования модели и получение соответствующего решения
	Г) Анализ состоятельности математической модели

Правильный ответ: 1-Г, 2-А, 3-В
Компетенции (индикаторы): ОПК-1, ОПК-2.

2. Установите соответствие между названиями численных методов решения систем уравнений и записью формул их итерационных процессов

1) Метод Якоби	А) $x_n = \varphi_1(x_{n-1}, y_{n-1})$ $y_n = \varphi_2(x_{n-1}, y_{n-1})$
2) Метод Ньютона	Б) $x^{(k)} = Bx^{(k-1)} + d, \quad k = 1, 2, \ldots$
3) Метод итераций	В) $x^{(p+1)} = x^{(p)} - W^{-1}\left(x^{(p)}\right) \cdot f\left(x^{(p)}\right), \ p = 0, 1, 2, \ldots$

Правильный ответ: 1-Б, 2-В, 3-А
Компетенции (индикаторы): ОПК-1, ОПК-2.

3. Установите соответствие описания метода поиска минимума функции (нескольких переменных) его названию

Описание	Название метода
1) В данном методе поиск осуществляется в направлении, определяемом при помощи вектора	А) Метод покоординатного спуска

2)	В данном методе сравниваются значения функции в вершинах симплекса. Наихудшая вершина, в которой функция принимает наибольшее значение, отбрасывается и заменяется новой	Б)	Градиентный метод
3)	В данном методе последовательно фиксируются все координаты, кроме одной. На каждой итерации используется метод одномерного поиска	В)	Метод Нелдера-Мида

Правильный ответ: 1-Б, 2-В, 3-А
Компетенции (индикаторы): ОПК-1, ОПК-2.

4. Установите соответствие между названиями численных методов уточнения корней уравнений и записью формул их итерационных процессов

1)	Метод касательных	А)	$x_n = \varphi(x_{n-1}),\ \ n = 1, 2, \ldots$
2)	Метод хорд	Б)	$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f(b) - f(x_k)}(b - x_k),\ \ x_0 = a$
3)	Метод итераций	В)	$x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n),\ \ n = 0, 1, 2, \ldots$

Правильный ответ: 1-В, 2-Б, 3-А
Компетенции (индикаторы): ОПК-1, ОПК-2.

5. Установите соответствие предложенного описания результатов применения методов построения функций по дискретно заданным данным их названиям

Описание результата		Название метода	
1)	Получена непрерывная функция, она проходит через некоторые из заданных точек на плоскости	А)	Интерполяционный полином Лагранжа
2)	Получена непрерывная функция (полином), ее степень зависит от количества узлов сетки, она проходит через все заданные точки на плоскости	Б)	Интерполяционный сплайн
3)	Получена кусочно-непрерывная функция (полином), ее степень не зависит от количества узлов сетки, она проходит через все заданные точки на плоскости	В)	Метод наименьших квадратов
		Г)	Метод Рунге-Кутта

Правильный ответ: 1-В, 2-А, 3-Б

Компетенции (индикаторы): ОПК-1, ОПК-2.

7. Установите соответствие между названиями численных методов решения задачи Коши для дифференциальных уравнений и записью формул их итерационных процессов

1) Метод Эйлера	А) $y_{i+1} = y_i + hf\left(x_i + \frac{h}{2},\ \ y_i + \frac{h}{2}f(x_i, y_i)\right)$
2) Метод Рунге-Кутта второго порядка	Б) $\begin{cases} y'_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[3f(x_i, y_i) - f(x_{i-1}, y_{i-1})], \\ y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[f(x_{i+1}, y'_{i+1}) + f(x_i, y_i)] \end{cases}$
3) Метод Адамса второго порядка	В) $y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i),\ \ i = 0, 1, \dots, n$

Правильный ответ: 1-В, 2-А, 3-Б
Компетенции (индикаторы): ОПК-1, ОПК-2.

8. Установите соответствие описания идеи метода приближенного решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений его названию

Описание идеи	Название метода
1) Используются формулы численного дифференцирования для аппроксимации производных, что сводит задачу к системе линейных алгебраических уравнений	А) Метод коллокаций
2) Решение ищется в виде линейной комбинации базисных функций, удовлетворяющих определенным требованиям, задача сводится к линейной алгебраической системе	Б) Метод пристрелки
3) Краевая задача сводится к последовательному решению нескольких задач Коши	В) Метод конечных разностей

Правильный ответ: 1-В, 2-А, 3-Б
Компетенции (индикаторы): ОПК-1, ОПК-2.

9. Установите соответствие между названием интерполяционных полиномов и записью формул их общего вида

1) Полином Лагранжа	А) $P_n(x) = f(x_0) + (x - x_0)f(x_0, x_1) + \cdots + (x - x_0)\dots(x - x_{n-1})f(x_0, x_1, \dots, x_n)$
2) Полином Ньютона	Б) $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)\frac{\omega(x)}{(x - x_k)\omega'(x_k)}$

3)	Интерполяционный сплайн	В)	$P_n(x) = a_k + b_k(x - x_k) + \frac{c_k}{2!}(x - x_k)^2 + \frac{d_k}{3!}(x - x_k)^3$

Правильный ответ: 1-Б, 2-А, 3-А
Компетенции (индикаторы): ОПК-1, ОПК-2.

Задания закрытого типа на установление правильной последовательности

Установите правильную последовательность.
Запишите правильную последовательность букв слева направо.

1. Восстановите хронологическую последовательность приведенных событий:
А) появление первой ЭВМ «ЭНИАК»
Б) появление понятия «вычислительный эксперимент»
В) появление первых языков программирования
Г) формирование первых методов и основ вычислительной математики
Правильный ответ: Г, А, В, Б
Компетенции (индикаторы): ОПК-1, ОПК-2.

2. Расположите этапы решения задачи в правильной последовательности:
А) математическое описание задачи
Б) формулировка задачи
В) получение решения
Г) использование ЭВМ
Д) численный анализ задачи
Правильный ответ: Б, А, Д, Г, В
Компетенции (индикаторы): ОПК-1, ОПК-2.

3. Установите правильную последовательность действий при решении СЛАУ методом Якоби:
А) определение (вычисление) условия остановки итерационного процесса
Б) вычисление нормы матрицы B
В) приведение системы к виду с диагональным преобладанием
Г) определение начального приближения и запуск процесса итераций
Правильный ответ: В, Б, А, Г
Компетенции (индикаторы): ОПК-1, ОПК-2.

4. Расположите пункты алгоритма простого градиентного метода в правильной последовательности:
А) вычисление координат новой точки по формуле $\vec{x}^{(1)} = \vec{x}^{(0)} - h \cdot \vec{g}^{(0)}$
Б) вычисление значения функции в новой точке $f\left(\vec{x}^{(1)}\right)$

В) Проверка выполнения условия $\left\|\vec{x}^{(1)}-\vec{x}^{(0)}\right\| \leq \varepsilon$, если оно выполняется, то поиск прекращается, в противном случае $\vec{x}^{(1)}$ принимается за $\vec{x}^{(0)}$ и все начинается заново
Г) Если значение $f\left(\vec{x}^{(1)}\right) > f\left(\vec{x}^{(0)}\right)$, то величина h уменьшается в два раза и снова вычисляется $\vec{x}^{(1)}$
Д) Выбор начального приближения $\vec{x}^{(0)}$, вычисление значения целевой функции $f\left(\vec{x}^{(0)}\right)$, выбор величины шага h.
Правильный ответ: Д, А, Б, Г, В
Компетенции (индикаторы): ОПК-1, ОПК-2.

5. Восстановите правильную хронологию действий при использовании метода наименьших квадратов:
А) определение вида аппроксимирующей функции
Б) определение коэффициентов и запись самой аппроксимирующей функции
В) построение исходных данных в соответствующей системе координат
Г) решение системы уравнений, получающейся после приравнивания частных производных от функции S нулю
Правильный ответ: В, А, Г, Б
Компетенции (индикаторы): ОПК-1, ОПК-2.

6. Расположите в правильной последовательности порядок определения коэффициентов кубического сплайна:
А) a_k
Б) b_k
В) c_k
Г) d_k
Правильный ответ: А, В, Г, Б
Компетенции (индикаторы): ОПК-1, ОПК-2.

7. Установите правильную последовательность действий при вычислении определенного интеграла методом трапеций:
А) используем формулу трапеций численного интегрирования
Б) определяем величину шага численного интегрирования исходя из заданной точности
В) проводим оценку максимума модуля второй производной подынтегральной функции
Г) для подынтегральной функции составляем сеточную функцию с точностью до соответствующего знака после запятой
Правильный ответ: В, Б, Г, А
Компетенции (индикаторы): ОПК-1, ОПК-2.

8. Расположите пункты алгоритма метода Галеркина в правильной последовательности:

А) строим невязку $R(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$
Б) определяем вид полинома, с коэффициентами $C_1, C_2, \dots, C_n$, который будет являться приближенным решением
В) выбираем систему базисных функций $U_i(x)$, удовлетворяющую необходимым условиям
Г) выполняем интегрирование и получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно искомых коэффициентов $C_1, C_2, \dots, C_n$
Д) строим систему уравнений, исходя из требований ортогональности невязки R всем базисным функциям $U_i(x)$
Е) решаем систему линейных алгебраических уравнений и находим коэффициенты $C_1, C_2, \dots, C_n$
Правильный ответ: В, Б, А, Д, Г, Е
Компетенции (индикаторы): ОПК-1, ОПК-2.

Задания открытого типа

Задания открытого типа на дополнение

Напишите пропущенное слово (словосочетание).

1. Задача вычисления $y = A(x)$ называется корректно поставленной, если для любых входных данных из некоторого класса решение задачи существует, ___________ и устойчиво по входным данным.
Правильный ответ: единственно
Компетенции (индикаторы): ОПК-1, ОПК-2.

2. Методы Фибоначчи и золотого сечения относятся к методам поиска ___________ .
Правильный ответ: экстремума
Компетенции (индикаторы): ОПК-1, ОПК-2.

3. В основе метода ____________ для системы уравнений лежит использование разложений функций $F_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ в ряд Тейлора, причем члены, содержащие вторые производные (и производные более высоких порядков), отбрасываются.
Правильный ответ: Ньютона
Компетенции (индикаторы): ОПК-1, ОПК-2.

Напишите результат вычислений.

4. Определите количество верных знаков числа $72.353(\pm 0.026)$
(Ответ запишите в виде целого числа)
Правильный ответ: 3

Компетенции (индикаторы): ОПК-1, ОПК-2.

Напишите пропущенное слово (словосочетание).

1. Для разрешимости задачи линейной интерполяции необходимо и достаточно чтобы система функций $\Phi_k(x)$ образовывала на $[a; b]$, ___________ систему интерполяционных функций.
Правильный ответ: чебышевскую
Компетенции (индикаторы): ОПК-1, ОПК-2.

2. Полиномы Лагранжа и Ньютона являются ___________ полиномами.
Правильный ответ: интерполяционными
Компетенции (индикаторы): ОПК-1, ОПК-2.

3. При этом искомая интегральная кривая $y = y(x)$, проходящая через точку $M_0(x_0, y_0)$, заменяется ломаной $M_0M_1M_2 \dots$ с вершинами $M_i(x_i, y_i)$ $(i = 0, 1, 2, \dots)$; каждое звено M_iM_{i+1} этой ломаной, называемой ломаной _________, имеет направление, совпадающее с направлением той интегральной кривой уравнения $y' = f(x, y)$, которая проходит через точку M_i.
Правильный ответ: Эйлера
Компетенции (индикаторы): ОПК-1, ОПК-2.

Задания открытого типа с кратким свободным ответом

Напишите пропущенное слово (словосочетание).

1. Численный метод нахождения корня уравнения с заданной степенью точности, в котором присутствует формула $x = (a + b)/2$ называется методом ___________.
Правильный ответ: половинного деления / дихотомии / бисекции
Компетенции (индикаторы): ОПК-1, ОПК-2.

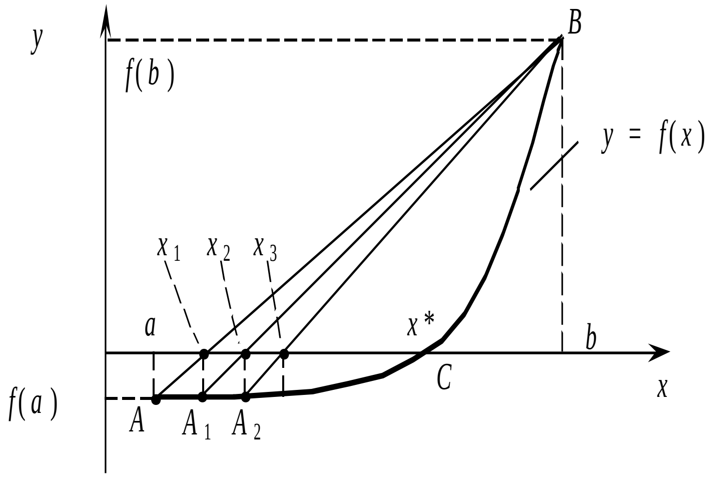
2. Методы решения систем линейных уравнений делятся на две группы - ______________ .
Правильный ответ: прямые и итерационные / точные и итерационные
Компетенции (индикаторы): ОПК-1, ОПК-2.

Напишите результат вычислений.

3. Дано уравнение $x^3 - 3x - 0.4 = 0$. Отделите корни аналитически (графически) и определите их количество.
Ответ: Количество корней равно _______ .
Правильный ответ: трем / 3
Компетенции (индикаторы): ОПК-1, ОПК-2.

Дайте ответ на вопрос.

4. Геометрической интерпретацией какого метода является иллюстрация, приведенная ниже?



Правильный ответ: хорд / пропорциональных частей
Компетенции (индикаторы): ОПК-1, ОПК-2.

Напишите пропущенное слово (словосочетание).

1. Численный метод вычисления значения определенного интеграла с заданной степенью точности, в котором на каждом частичном сдвоенном интервале площадь криволинейной трапеции оценивается как $\frac{h}{3}(y_k + y_{k+1} + y_{k+2})$ называется методом ___________.
Правильный ответ: парабол / Симпсона
Компетенции (индикаторы): ОПК-1, ОПК-2.

2. Кусочно-полиномиальную порядка 3 функцию, имеющую на $[a, b]$ непрерывные до 2-го порядка включительно производные называют ______________ .
Правильный ответ: Кубическим сплайном / сплайном порядка 3 / сплайном 3-го порядка
Компетенции (индикаторы): ОПК-1, ОПК-2.

Напишите результат вычислений.

3. Запишите матрицу коэффициентов системы линейных уравнений (без правой части), которую нужно решить для нахождения параметров аппроксимирующей функции $y = ax + b$ для данных

x_i	0	1	2	4
y_i	0.2	0.9	2.1	3.7

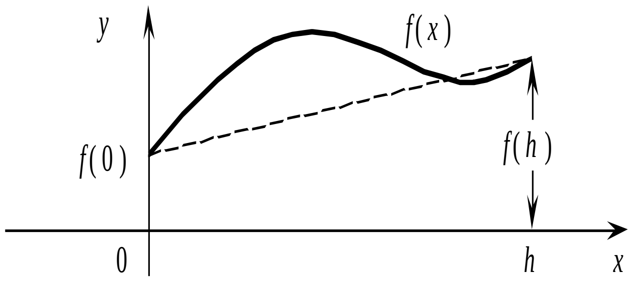
Ответ: Матрица коэффициентов системы будет иметь вид $A =$ _______ .

Правильный ответ: $\begin{pmatrix} 21 & 7 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$ / $\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 21 & 7 \end{pmatrix}$

Компетенции (индикаторы): ОПК-1, ОПК-2.

Дайте ответ на вопрос.

4. Геометрической интерпретацией какого метода является иллюстрация, приведенная ниже?



Правильный ответ: трапеций / метода трапеций / квадратурного метода трапеций

Компетенции (индикаторы): ОПК-1, ОПК-2.

Задания открытого типа с развернутым ответом

1. Используя метод простой итерации (Якоби), найти решение системы с точностью $\varepsilon = 10^{-4}$.

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 + 2x_3 = 1.75 \\ x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 2.5 \\ 2x_1 + x_2 - 8x_3 = -0.25 \end{cases}$$

Привести расширенное решение

Время выполнения – 30 мин.

Ожидаемый результат:

Диагональное преобладание в матрице A исходной системы присутствует. Приведем систему к виду, удобному для итераций. Для этого из первого уравнения системы выразим неизвестное x_1, из второго уравнения – неизвестное x_2, из третьего – неизвестное x_3. В результате получим систему

$$\begin{cases} x_1 = 0.25x_2 - 0.5x_3 + 0.4375 \\ x_2 = 0.20x_1 + 0.6x_3 - 0.5 \\ x_3 = 0.25x_1 + 0.125x_2 + 0.03125 \end{cases}$$

В последнем уравнении коэффициенты даны с точностью до погрешности округления. Здесь

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0.25 & -0.5 \\ 0.2 & 0 & 0.6 \\ 0.25 & 0.125 & 0 \end{pmatrix},\ d = \begin{pmatrix} 0.4375 \\ -0.5 \\ 0.03125 \end{pmatrix}.$$

Достаточное условие сходимости метода простой итерации выполнено, так как

$$\|B\| = \max_i\{0.75,\ 0.8,\ 0.375\} = 0.8 < 1.$$

Примем за начальное приближение к решению вектор $x^{(0)} = d = (0.43750, -0.50000,\ 0.03125)^T$
и будем вести итерации по формуле

$$x_i^{(k+1)} = \sum_{j=1}^{3} b_{ij} x_j^{(k)} + d_i$$

до выполнения критерия остановки, где в данном случае $\varepsilon = \frac{1-0{,}8}{0{,}8} \cdot 10^{-4} = 0{,}25 \cdot 10^{-4}$.
Значения приближений в таблице приводятся с пятью цифрами после десятичной точки.

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$\left\|X^{(k)} - X^{(k-1)}\right\|$
0	0.43750	–0.50000	0.03125	–
1	0.29688	–0.39375	0.07812	0.14062
2	0.30000	–0.39375	0.05625	0.02187
3	0.31094	–0.40625	0.05703	0.01250
4	0.30742	–0.40359	0.05820	$3.52 \cdot 10^{-3}$
5	0.30750	–0.40360	0.05766	$5.4 \cdot 10^{-4}$
6	0.30777	–0.40390	0.05768	$3 \cdot 10^{-4}$
7	0.30768	–0.40384	0.05770	$9 \cdot 10^{-5}$
8	0.30769	–0.40384	0.05769	$1 \cdot 10^{-5}$

При $k=8$ условие остановки выполняется и можно окончательно положить

$$x_1 = 0.3077 \pm 0.0001,\ x_2 = -0{,}4038 \pm 0.0001,\ x_3 = 0.0577 \pm 0.0001.$$

Компетенции (индикаторы): ОПК-1, ОПК-2.

2. Решить уравнение $e^{2x} + 3x - 4 = 0$ с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$ методом касательных (Ньютона).
Привести расширенное решение.

Время выполнения – 30 мин.
Критерии оценивания:
– наличие локализации корня графическим либо аналитическим способом
– обоснование выбора начального приближения
– проведение итераций с сохранением запасного знака
– получение решения уравнения с заданной точностью $x \approx 0.474$
Компетенции (индикаторы): ОПК-1, ОПК-2.

3. Построить интерполяционный многочлен Лагранжа для функции $y = f(x)$, заданной таблично

x	0.351	0.867	3.315	5.013	6.432
y	-0.572	-2.015	-3.342	-5.752	-6.911

Вычислить значение функции в точке $x_1 + x_2$.
Привести расширенное решение
Время выполнения – 30 мин.
Ожидаемый результат:
Построим интерполяционный многочлен Лагранжа 4-й степени $L_4(x)$ в виде линейной комбинации $L_4(x) = \sum_{k=0}^{4} f(x_k)\, l_k(x)$.

Вычислим базисные многочлены.

$$l_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)(x_0 - x_4)} =$$

$$= \frac{(x - 0.867)(x - 3.315)(x - 5.013)(x - 6.432)}{(0.351 - 0.867)(0.351 - 3.315)(0.351 - 5.013)(0.351 - 6.432)} =$$

$$= 0.0231 \cdot (x - 0.867)(x - 3.315)(x - 5.013)(x - 6.432),$$

Аналогично

$$l_1(x) = \frac{(x - 0.351)(x - 3.315)(x - 5.013)(x - 6.432)}{(0.867 - 0.351)(0.867 - 3.315)(0.867 - 5.013)(0.867 - 6.432)} =$$

$$= -0.0343 \cdot (x - 0.351)(x - 3.315)(x - 5.013)(x - 6.432),$$

$$l_2(x) = \frac{(x - 0.351)(x - 0.867)(x - 5.013)(x - 6.432)}{(3.315 - 0.351)(3.315 - 0.867)(3.315 - 5.013)(3.315 - 6.432)} =$$

$$= 0.0260 \cdot (x - 0.351)(x - 0.867)(x - 5.013)(x - 6.432),$$

$$l_3(x) = \frac{(x - 0.351)(x - 0.867)(x - 3.315)(x - 6.432)}{(5.013 - 0.351)(5.013 - 0.867)(5.013 - 3.315)(5.013 - 6.432)} =$$

$$= -0.0215 \cdot (x - 0.351)(x - 0.867)(x - 3.315)(x - 6.432),$$

$$l_4(x) = \frac{(x - 0.351)(x - 0.867)(x - 3.315)(x - 5.013)}{(6.432 - 0.351)(6.432 - 0.867)(6.432 - 3.315)(6.432 - 5.013)} =$$

$$= 0.0067 \cdot (x - 0.351)(x - 0.867)(x - 3.315)(x - 5.013).$$

Тогда интерполяционный полином Лагранжа будет иметь вид

$$L_4(x) = -0.0132 \cdot (x-0.867)(x-3.315)(x-5.013)(x-6.432) +$$
$$+0.0691 \cdot (x-0.351)(x-3.315)(x-5.013)(x-6.432) -$$
$$-0.0870 \cdot (x-0.351)(x-0.867)(x-5.013)(x-6.432) +$$
$$+0.1235 \cdot (x-0.351)(x-0.867)(x-3.315)(x-6.432) -$$
$$-0.0462 \cdot (x-0.351)(x-0.867)(x-3.315)(x-5.013).$$

Вычислим значение полинома в заданной точке

$L_4(x_1 + x_2) = L_4(0.867 + 3.315) = -4.3453.$

Компетенции (индикаторы): ОПК-1, ОПК-2.

4. Найти минимум функции $f(x) = f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2 + e^{x_1+x_2}$ методом градиентного спуска, завершив расчет при

$$\left|\frac{\partial f(x^{(k)})}{\partial x_i}\right| \le 0.05,\ \ i = 1,2\ .$$

Привести расширенное решение.

Время выполнения – 25 мин.

Ожидаемый результат:

Для решения задачи выберем начальное приближение $x^{(0)} = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}\right) = (0; 0)$ и $h = 1$.

1-й шаг: $k = 0$; $x_1^{(0)} = 0$; $x_2^{(0)} = 0$; $h = 1$; $f\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}\right) = 1$, $\frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_1} = 1$, , $\frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_2} = 1$.

Тогда по формуле метода получаем

$x_1^{(1)} = x_1^{(0)} - h\frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_1} = -1$; $x_2^{(1)} = x_2^{(0)} - h\frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_2} = -1$;

$f\left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}\right) = 3.145 > f\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}\right) = 1$, согласно алгоритма необходимо уменьшить шаг h. Уменьшим его вдвое, приняв $h = 0.5$ и повторяем вычисления с $x_1^{(0)} = 0$; $x_2^{(0)} = 0$:

$x_1^{(1)} = 0 - 0.5 \cdot 1 = -0.5$; $x_2^{(1)} = 0 - 0.5 \cdot 1 = -0.5$;

$f\left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}\right) = 1.118 > f\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}\right) = 1$, снова необходимо уменьшить шаг h вдвое: $h = 0.25$. Повторяем вычисления:

$x_1^{(1)} = x_1^{(0)} - h\frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_1} = 0 - 0.25 \cdot 1 = -0.25$; $x_2^{(1)} = x_2^{(0)} - h\frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_2} = 0 - 0.25 \cdot 1 = -0.25$;

$f\left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}\right) = f(-0.25;\ -0.25) = 0.794 < f\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}\right) = 1$;

$$\frac{\partial f\left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}\right)}{\partial x_1} = 2x_1^{(1)} + exp\left(x_1^{(1)} + x_2^{(1)}\right) = -0.5 + exp(-0.25 - 0.25) = 0.106;$$

$$\frac{\partial f\left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}\right)}{\partial x_2} = 4x_2^{(1)} + exp\left(x_1^{(1)} + x_2^{(1)}\right) = 4(-0.25) + exp(-0.25 - 0.25) = -0.393;$$

$\left|grad\ f\left(x^{(1)}\right)\right| = \sqrt{0.106^2 + (-0.393)^2 = 0.407} > \varepsilon = 0.05.$

2-й шаг: $k = 1$; $x_1^{(1)} = -0.25$; $x_2^{(1)} = -0.25$; $h = 0.25$;

$x_1^{(2)} = x_1^{(1)} - h\frac{\partial f(x^{(1)})}{\partial x_1} = -0.25 - 0.25 \cdot 0.106 = -0.2765;$

$x_2^{(2)} = x_2^{(1)} - h\frac{\partial f(x^{(1)})}{\partial x_2} = -0.25 - 0.25 \cdot (-0.393) = -0.1518;$

$f\left(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}\right) = 0.774 < f\left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}\right) = 0.794$. Таким образом, можно сохранить значение h, приняв $h = 0.25$.

$\frac{\partial f\left(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}\right)}{\partial x_1} = 2x_1^{(1)} + exp\left(x_1^{(1)} + x_2^{(1)}\right) = 0.0983;$ $\frac{\partial f\left(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}\right)}{\partial x_2} = 4x_2^{(1)} + exp\left(x_1^{(1)} + x_2^{(1)}\right) = 0.0451;$

$\left|grad\ f\left(x^{(2)}\right)\right| = \sqrt{0.0983^2 + 0.0451^2} = 0.108 > \varepsilon = 0.05.$

3-й шаг: $k = 2$; $x_1^{(1)} = -0.2765$; $x_2^{(2)} = -0.1518$; $h = 0.25$;

$x_1^{(3)} = x_1^{(3)} - h\frac{\partial f(x^{(2)})}{\partial x_1} = -0.2765 - 0.25 \cdot 0.0983 = -0.301;$

$x_2^{(3)} = x_2^{(2)} - h\frac{\partial f(x^{(2)})}{\partial x_2} = -0.1518 - 0.25 \cdot 0{,}0451 = -0.163;$

$f\left(x_1^{(3)}, x_2^{(3)}\right) = 0.772 < f\left(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}\right) = 0.774$. Таким образом, можно сохранить значение h, приняв $h = 0.25$.

$\frac{\partial f\left(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}\right)}{\partial x_1} = 2x_1^{(1)} + exp\left(x_1^{(1)} + x_2^{(1)}\right) = 0.0262;$ $\frac{\partial f\left(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}\right)}{\partial x_2} = 4x_2^{(1)} + exp\left(x_1^{(1)} + x_2^{(1)}\right) = -0.023;$

$\left|grad\ f\left(x^{(3)}\right)\right| = \sqrt{0.0262^2 + (-0{,}023)^2} = 0.03486 < \varepsilon.$

Точность достигнута, следовательно, $x^* = (x_1^*, x_2^*) \approx (-0.301;\ -0.163)$; $f^* \approx 0.772$

Ответ: точка минимума $x^* = (x_1^*, x_2^*) \approx (-0.301;\ -0.163)$, значение функции в этой точке $f^* \approx 0.772$.

Компетенции (индикаторы): ОПК-1, ОПК-2.

5. С помощью формулы Симпсона вычислить $I = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sin x}{x} dx$ с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$.

Привести расширенное решение.

Время выполнения – 30 мин.

Ожидаемый результат:
Выберем шаг h.
$R_c = -\frac{h^4(b-a)}{180} f^{IV}(\xi)$; $\xi \in [a, b]$, т.е. $\xi \in [\pi/4,\ \pi/2]$;
$\frac{h^4(b-a)}{180} \max\limits_{[a,b]} |f^{IV}(\xi)| < 0.5 \cdot 10^{-3}$.
Вычислим $f^{IV}(\xi)$
$f^{IV}(x) = \frac{\sin x}{x} + 4\frac{\cos x}{x^2} - 12\frac{\sin x}{x^3} - 24\frac{\cos x}{x^4} + 24\frac{\sin x}{x^5}$ (*).
Оценим $|f^{IV}(\xi)|$ на отрезке $[\pi/4,\ \pi/2]$. Воспользуемся величинами из (*): $\frac{\sin x}{x}\left(1 - \frac{12}{x^2} + \frac{24}{x^4}\right)$ и $\frac{4\cos x}{x^2}\left(\frac{6}{x^2} - 1\right)$. Они положительные и убывают, следовательно, их максимальное значение в точке $x = \frac{\pi}{4}$.
При этом $|f^{IV}(\xi)| \le \frac{\sin x}{x}\left(1 - \frac{12}{x^2} + \frac{24}{x^4}\right) + \frac{4\cos x}{x^2}\left(\frac{6}{x^2} - 1\right) < 81$.
Таким образом, $R \le \frac{h^4 \cdot \pi/4}{180} \cdot 81 < 0.5 \cdot 10^{-3}$; $h^4 < 14 \cdot 10^{-4}$; $h \le 0.19$.
С другой стороны для данного метода h выбирается с учетом того, чтобы $[\pi/4,\ \pi/2]$ делился на четное число отрезков. Этим двум требованиям отвечает $h = \pi/24 = 0.13 < 0.19$, при котором $n = \frac{b-a}{h} = 6$. Тогда, чтобы погрешность округления не превысила $0{,}5\cdot10^{-3}$ достаточно вычисления выполнить с 4 знаками после запятой.
Составим таблицу $y = \frac{\sin x}{x}$, с $h = \pi/24 = 7°30' = 0.1309$

i	x_i^0	x_i	$\sin x$	y_0, y_6	y_{2m}	y_{2m-1}
0	45° 00′	0,7854	0,7071	0,9003		
1	52° 30′	0,9163	0,7934			0,8659
2	60° 00′	1,0472	0,8660		0,8270	
3	67° 30′	1,1781	0,9239			0,7843
4	75° 00′	1,3090	0,9659		0,7379	
5	82° 30′	1,4399	0,9914			0,6885
6	90° 00′	1,5708	1,0000	0,6366		
Сумма				1,5369	1,5649	2,3386

Для $n = 6$ по формуле Симпсона
$I = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{h}{3}[(y_0 + y_6) + 4(y_1 + y_3 + y_5) + 2(y_2 + y_4)] = 0.6118 \approx 0.612$.
Компетенции (индикаторы): ОПК-1, ОПК-2.

6. Решить задачу Коши методом Рунге-Кутта 4 порядка для дифференциального уравнения $y' = x^2 + y$, $y(0) = 1$ на отрезке $[0; 0.3]$ с шагом $h = 0.1$.
Привести расширенное решение.
Время выполнения – 30 мин.
Ожидаемый результат:
По формулам Рунге-Кутта вычислим значения k_0, k_1, k_2, k_3 :

$k_0 = hf(x_0, y_0) = 0.1(0^2 + 1) = 0.1$

$k_1 = hf(x_0 + h/2\,, y_0 + k_0/2) = 0.1\left(\left(0 + \frac{0.1}{2}\right)^2 + 1 + \frac{0.1}{2}\right) = 0.105250$

$k_2 = hf(x_0 + h/2\,, y_0 + k_1/2) = 0.1\left(\left(0 + \frac{0.1}{2}\right)^2 + 1 + \frac{0.105250}{2}\right) = 0.105513$

$k_3 = hf(x_0 + h, y_0 + k_2) = 0.1((0 + 0.1)^2 + 1 + 0.105513) = 0.111551.$

Теперь находим значение y_1 в точке $x_1 = 0.1$:

$y_1 = y_0 + (k_0 + 2k_1 + 2k_2 + k_3)/6 =$
$=1 + (0.1 + 2 \cdot 0.105250 + 2 \cdot 0.105513 + 0.111551)/6 = 1.105513.$

Аналогично вычисляются последующие значения функции в узловых точках

$k_0 = hf(x_1, y_1) = 0.1(0.1^2 + 1.105513) = 0.111551$

$k_1 = hf(x_1 + h/2\,, y_1 + k_0/2) = 0.1\left(\left(0.1 + \frac{0.1}{2}\right)^2 + 1.105513 + \frac{0.111551}{2}\right)$
$= 0.118379$

$k_2 = hf(x_1 + h/2\,, y_1 + k_1/2) = 0.1\left(\left(0.1 + \frac{0.1}{2}\right)^2 + 1.105513 + \frac{0.118379}{2}\right)$
$= 0.118720$

$k_3 = hf(x_1 + h, y_1 + k_2) = 0.1((0.1 + 0.1)^2 + 1.105513 + 0.118720) =$
$0.126423.$

$y_2 = y_1 + (k_0 + 2k_1 + 2k_2 + k_3)/6 =$
$=1.105513 + (0.111551 + 2 \cdot 0.118379 + 2 \cdot 0.118720 + 0.126423)/6 =$
$1.224208.$

$k_0 = hf(x_2, y_2) = 0.1(0.1^2 + 1.224208) = 0.126421$

$k_1 = hf(x_2 + h/2\,, y_2 + k_0/2) = 0.1\left(\left(0.2 + \frac{0.1}{2}\right)^2 + 1.224208 + \frac{0.126421}{2}\right)$
$= 0.134992$

$k_2 = hf(x_2 + h/2\,, y_2 + k_1/2) = 0.1\left(\left(0.2 + \frac{0.1}{2}\right)^2 + 1.224208 + \frac{0.134992}{2}\right)$
$= 0.135420$

$k_3 = hf(x_2 + h, y_2 + k_2) = 0.1((0.2 + 0.1)^2 + 1.224208 + 0.135420)$
$= 0.144963$

$y_3 = y_2 + (k_0 + 2k_1 + 2k_2 + k_3)/6 =$
$= 1.224208 + (0.126421 + 2 \cdot 0.134992 + 2 \cdot 0.135420 + 0.144963)/6 =$
$1.359576.$

Сеточную функцию записываем в виде таблицы

x	0	0.1	0.2	0.3
y	1	1.105513	1.224208	1.359576

Компетенции (индикаторы): ОПК-1, ОПК-2.

Экспертное заключение

Представленный комплект оценочных материалов по дисциплине «Численные методы» соответствует требованиям ФГОС ВО.

Предлагаемые оценочные материалы адекватны целям и задачам реализации основной профессиональной образовательной программы по направлению подготовки 01.03.03 Механика и математическое моделирование.

Виды оценочных средств, включенные в представленный фонд, отвечают основным принципам формирования ФОС.

Разработанные и представленные для экспертизы оценочные материалы рекомендуются к использованию в процессе подготовки обучающихся по указанному направлению.

Председатель учебно-методической комиссии
института компьютерных систем и
информационных технологий Ветрова Н. Н.

Лист изменений и дополнений

№ п/п	Виды дополнений и изменений	Дата и номер протокола заседания кафедры (кафедр), на котором были рассмотрены и одобрены изменения и дополнения	Подпись (с расшифровкой) заведующего кафедрой (заведующих кафедрами)
1.	Дополнен комплектом оценочных материалов	протокол заседания кафедры прикладной математики № 8 от 24.01.2025	В.В. Малый