

**Комплект оценочных материалов по дисциплине
«Уравнения математической физики»**

Задания закрытого типа

Задания закрытого типа на выбор правильного ответа

1. Выберите один правильный ответ

Определить *вид* ДУ в частных производных для функции $u(x, y)$:
 $2xyu_{xyy} - u^2u_{xy} + xu_x - 3y^2u + 2 = 0$

А) квазилинейное

Б) общего вида

В) линейное

Правильный ответ: А

Компетенции (индикаторы): ОПК-1, ОПК-2.

2. Выберите один правильный ответ

Определить *порядок* ДУ в частных производных для функции $u(x, y)$:
 $(x + y)u_x^2 - 4y^3(u_{yxy} + e^x u_{xy}) + 2y^2(u_y - 3u_x + 2yu_{xyy}) + u - 1 = 0$

А) 3

Б) 1

В) 2

Правильный ответ: В

Компетенции (индикаторы): ОПК-1, ОПК-2.

3. Выберите один правильный ответ

Определить знак *sgn* δ параметра $\delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$ (дискриминанта) ДУ в частных производных для функции $u(x, y)$: $x^2u_{xx} - y^2u_{yy} = 0$

А) $\text{sgn}\delta = 0$

Б) $\text{sgn}\delta = +1$

В) $\text{sgn}\delta = -1$

Правильный ответ: Б

Компетенции (индикаторы): ОПК-1, ОПК-2.

4. Выберите один правильный ответ

Определить якобиан $I = \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)}$ перехода $\xi = xy$, $\eta = \frac{y}{x}$:

А) $-\frac{y}{x}$

Б) $\frac{x}{y}$

В) $\frac{y}{x}$

Правильный ответ: В

Компетенции (индикаторы): ОПК-1, ОПК-2.

Задания закрытого типа на установление соответствия

1. Установите правильное соответствие. Каждому элементу левого столбца соответствует только один элемент правого столбца.

	Вид дифференциального уравнения		Уравнение характеристик
1)	$yu_{xx} - u_{yy} = 0, y > 0;$	А)	$y^2 dy^2 - 2xy dx dy + x^2 dx^2 = 0$
2)	$xu_{xx} + 2xu_{xy} - (1-x)u_{yy} = 0$	Б)	$y dy^2 - dx^2 = 0$
3)	$y^2 u_{xx} + 2xy u_{xy} + x^2 u_{yy} = 0$	В)	$x dy^2 - x dx dy - (1-x) dx^2 = 0$

Правильный ответ:

1	2	3
Б		А

Компетенции (индикаторы): ОПК-1, ОПК-2.

2. Установите правильное соответствие. Каждому элементу левого столбца соответствует только один элемент правого столбца.

	Общий вид уравнения		Канонический вид
1)	$x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} = 0$	А)	$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + (\xi - \eta)^{-1} u_{\xi} + \left(\frac{1}{2\eta}\right) u_{\eta} = 0$
2)	$tg^2 x \cdot u_{xx} - 2y \cdot tg x \cdot u_{xy} + y^2 u_{yy} + tg^3 x \cdot u_x = 0$	Б)	$u_{\xi\eta} - \frac{1}{2\xi} u_{\eta} = 0$
3)	$y^2 u_{xx} + 2xy \cdot u_{xy} + x^2 u_{yy} + y \cdot u_y = 0$	В)	$u_{\eta\eta} - \frac{2\xi \cdot u_{\xi}}{\eta^2} = 0$

Правильный ответ:

1	2	3
Б	В	А

Компетенции (индикаторы): ОПК-1, ОПК-2.

3. Установите правильное соответствие. Каждому элементу левого столбца соответствует только один элемент правого столбца.

	ДУ в канонической форме		Название
--	-------------------------	--	----------

1)	$u_{tt} = a^2 u_{xx}, u = u(x, t)$	А)	уравнение теплопроводности
2)	$u_t = a^2 u_{xx}, u = u(x, t)$	Б)	стационарное уравнение теплопроводности
3)	$u = u(x, t), u = u(x, y)$	В)	уравнение колебаний

Правильный ответ:

1	2	3
В	А	Б

Компетенции (индикаторы): ОПК-1, ОПК-2.

4. Установите правильное соответствие. Каждому элементу левого столбца соответствует только один элемент правого столбца.

	Постановка задачи: найти решение ДУ		Ответ
1)	$x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} = 0$	А)	$u(x, y) = \varphi(xy) \ln y + \psi(xy)$, где $\varphi(x), \psi(x)$ – произвольные функции
2)	$x^2 u_{xx} - 2xy \cdot u_{xy} + y^2 u_{yy} + x \cdot u_x + y \cdot u_y = 0$	Б)	$u = (1 + 2x - e^{2x})e^y + \varphi(x) + \frac{1}{2} \int_y^{2x+y} \psi(z) dz$
3)	$u_{xx} - 2u_{xy} + 4e^y = 0$ $u(0, y) = \varphi(y),$ $u_x(0, y) = \psi(y)$	В)	$u(x, y) = \sqrt{xy} \cdot \Phi\left(\frac{y}{x}\right) + \psi(xy),$ $\Phi(\eta) = \int \varphi(\eta) d\eta$, где $\varphi(x), \psi(x)$ – произвольные функция

Правильный ответ:

1	2	3
В	А	Б

Компетенции (индикаторы): ОПК-1, ОПК-2.

Задания закрытого типа на установление правильной последовательности

1. Расположите ДУ в направлении возрастания их порядка:

А) $x^3 y(u_{xy}^2 - 2u_y) + 3e^x u_x - x^2(xy u_{xy}^2 - 2u) + 3 = 0$

Б) $xy(u_{xxy} + 2u_{xy}) - 2xy(u_{xy}^2 - u_{xy}) + uu_{x=0}$

В) $u_{xyxy} + 2u_{xx} - u + 2 = 0$

Г) $\sin xy u_{xx} - xy(u_x + u) + y(u_{xy} + x \cos x) = 0$

Правильный ответ: А, Г, Б, В

Компетенции (индикаторы): ОПК-1, ОПК-2.

2. Расположите ДУ в порядке возрастания параметра $\operatorname{sgn} \delta$, $\delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$:

А) $x^2 u_{xx} + y^2 u_{yy} = 0$

Б) $e^{2y} u_{xx} - u_{yy} = 0$

В) $x^2 u_{xx} + 81y^2 u_{yy} - 18xy u_{xy} - 10xu_x = 0$

Правильный ответ: А, В, Б

Компетенции (индикаторы): ОПК-1, ОПК-2.

3. Расположите ДУ в порядке возрастания суммарного числа начальных и граничных условий:

А) $u_{tt} = a^2 u_{xx}$, $x \in [0, l]$, $t > 0$

Б) $u_{tt} = a^2 u_{xx}$, $-\infty < x < +\infty$, $t > 0$

В) $u_t = a^2 u_{xx}$, $x \in [0, l]$, $t > 0$

Правильный ответ: Б, В, А

Компетенции (индикаторы): ОПК-1, ОПК-2.

4. Расположите ДУ в порядке возрастания возможных значений параметра $\operatorname{sgn} \delta$, $\delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$:

А) $xu_{xx} - 2yu_{xy} + u_{yy} = 0$

Б) $y^2 u_{xx} - x^2 u_{yy} = 0$, $x, y \neq 0$

В) $xu_{xx} + yu_{yy} = 0$, $x, y \neq 0$

Правильный ответ: Б, В, А

Компетенции (индикаторы): ОПК-1, ОПК-2.

Задания открытого типа

Задания открытого типа на дополнение

1. Напишите пропущенное слово (словосочетание).

_____ – граничное условие 1-го рода $u(0, t) = \mu(t)$.

.

Правильный ответ: заданный режим.

Компетенции (индикаторы): ОПК-1, ОПК-2.

2. Напишите пропущенное слово (словосочетание).

_____ – граничное условие 2-го рода $u_x(0, t) = v(t)$.

Правильный ответ: заданная сила

Компетенции (индикаторы): ОПК-1, ОПК-2.

3. Напишите пропущенное слово (словосочетание).

_____ – граничное условие 3-го рода $u_x(0, t) = h[u(0, t) - \theta(t)]$.

Правильный ответ: упругое закрепление.

Компетенции (индикаторы): ОПК-1, ОПК-2.

4. Напишите пропущенное слово (словосочетание).

_____ – функция класса $u(x, y) \in C^2(G) \cap C(\bar{G}), G \subset R^2$, удовлетворяющая в G уравнению Лапласа $u_{xx} + u_{yy} = 0$.

Правильный ответ: гармоническая функция.

Компетенции (индикаторы): ОПК-1, ОПК-2.

5. Напишите пропущенное слово (словосочетание).

Преобразование $F: \xi = \varphi(x, y), \eta = \psi(x, y)$ является биекцией $R^2 \rightarrow R^2$, если якобиан $\frac{\delta(\xi, \eta)}{\delta(x, y)}$ _____.

Правильный ответ: отличен от нуля.

Компетенции (индикаторы): ОПК-1, ОПК-2.

Задания открытого типа с кратким свободным ответом

1. Собственные значения λ_n задачи Штурма-Лиувилля $\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, & 0 < x < l \\ X'(0) = X'(l) = 0 \end{cases}$ равны ... (Ответ запишите в виде функции)

Правильный ответ: $\lambda_n = \frac{\pi n}{l}$.

Компетенции (индикаторы): ОПК-1, ОПК-2.

2. Найти область гиперболичности ДУ $xu_{xx} + yu_{yy} = 0$ (Ответ запишите в виде интервала)

Правильный ответ: $\begin{cases} x > 0 \\ y < 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} x < 0 \\ y > 0 \end{cases}$.

Компетенции (индикаторы): ОПК-1, ОПК-2.

3. Найти значение параметра a , при котором функция $u(x, y) = ax^2y^2 + 2x^4 + 2y^4$ будет гармонической (Ответ запишите в виде числа)

Правильный ответ: -12.

Компетенции (индикаторы): ОПК-1, ОПК-2.

4. Сколько начальных условий необходимо поставить для уравнения $u_{tt} = a^2u_{xx}$, $x \in [0, l]$, $t > 0$ (Ответ запишите в виде числа)

Правильный ответ: 2.

Компетенции (индикаторы): ОПК-1, ОПК-2.

5. Найти сумму числа начальных и числа граничных условий для ДУ $u_t = a^2u_{xx}$, $x \in [0, l]$, $t > 0$ (Ответ запишите в виде числа)

Правильный ответ: 3.

Компетенции (индикаторы): ОПК-1, ОПК-2.

Задания открытого типа с развернутым ответом

1. Решить задачу, используя метод разделения переменных (метод Фурье):
Проинтегрировать уравнение малых продольных колебаний цилиндрического стержня, когда один конец его закреплен, а другой – свободный.

Привести расширенное решение.

Время выполнения – 30 мин.

Ожидаемый результат:

1. Данная задача сводится к решению уравнения: $u_{xx} - \frac{1}{a^2} \cdot u_{tt} = 0$, при таких граничных и начальных условиях: $u(0, t) = 0$, $u(l, t) = 0$, ($t > 0$), $u(x, 0) = \varphi(x)$, $u_t(x, 0) = \psi(x)$ ($0 \leq x \leq l$). Здесь $u(x, t)$ – смещение сечения с абсциссой x , l – длина стержня, $a^2 = \frac{E}{\rho}$, ρ – плотность, E – модуль Юнга.

2. Ищем решение в виде: $u(x, t) = X(x)T(t)$. Подставив в начальное уравнение и разделив переменные, находим: $x'' + \lambda x = 0$, $T'' + a^2 \lambda T = 0$, откуда

$$\lambda_n = \left[\frac{(2n+1)\pi}{2l} \right]^2, x_n = A_n \sin \frac{(2n+1)\pi}{2l} x;$$
$$T_n = C_n \cos \frac{(2n+1)\pi}{2l} at + D_n \sin \frac{(2n+1)\pi}{2l} at.$$

3. Находим общее решение основной задачи

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[a_n \cos \frac{(2n+1)\pi at}{2l} + b_n \sin \frac{(2n+1)\pi at}{2l} \right] \sin \frac{(2n+1)\pi}{2l} x.$$

4. Используя начальные условия, находим неизвестные коэффициенты.

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi_1(x) \sin \frac{(2n+1)\pi}{2l} x dx;$$
$$b_n = \frac{4}{a\pi(2n+1)} \int_0^l \varphi_2(x) \sin \frac{(2n+1)\pi}{2l} x dx.$$

Подставив эти коэффициенты в общее решение основной задачи, получим окончательный ответ.

Критерии оценивания:

- построение соответствующей краевой задачи;
- формулировка задачи Штурма-Лиувилля;
- определение общего решения основной задачи;
- использования начальных условий для нахождения неопределенных коэффициентов в общем решении основной задачи.

Компетенции (индикаторы): ОПК-1, ОПК-2.

2. Решить ДУ гиперболического типа, используя метод Римана:

$$y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad -\infty < x < +\infty, \quad 1 < y < +\infty;$$

$$u|_{y=1} = \varphi(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=1} = \psi(x), \quad -\infty < x < +\infty.$$

Привести расширенное решение.

Время выполнения – 30 мин.

Ожидаемый результат:

1. Построим функцию Римана. В уравнении используем замену $\xi = xy$, $\eta = y/x$. Получим уравнение вида $u_{\xi\eta} - (1/2\xi)u_\eta = 0$. Согласно теории, функция Римана должна удовлетворять однородному сопряжённому уравнению

$$v_{\xi\eta} + (1/2\xi)v_\eta = 0$$

и таким условиям на характеристиках:

$$v(\xi, \eta_0; \xi_0, \eta_0) = e^{-\int_{\xi_0}^{\xi} (2\xi)^{-1} d\xi} = \sqrt{\xi_0/\xi} (MQ).$$

$$v(\xi_0, \eta; \xi_0, \eta_0) = e^{\int_{\eta_0}^{\eta} d\eta} = I(MP).$$

В данном случае такой функцией является

$$v(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0) = \sqrt{\xi_0/\xi}.$$

2. Формула Римана

$$u(M) = \frac{(uv)P + (uv)Q}{2} + \frac{1}{2} \int_{QP} \left(v \frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{\partial v}{\partial x} + 2buv \right) dx - \left(v \frac{\partial u}{\partial y} - u \frac{\partial v}{\partial y} + 2a uv \right) dy - \iint_D v f(x, y) dx dy,$$

даёт решение задачи Коши, если оно существует, при таких условиях на кривой AB :

$$u|_{AB} = \varphi, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{AB} = \psi.$$

3. Формула Римана при $a = 0$, $b = -1/2\xi$, $f = 0$ имеет вид

$$\begin{aligned}
u(\xi_0, \eta_0) &= \frac{(uv)_P + (uv)_Q}{2} + \frac{1}{2} \int_{QP} \left(v \frac{\partial u}{\partial \xi} - u \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{uv}{\xi} \right) d\xi - \left(v \frac{\partial u}{\partial \eta} - u \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) d\eta = \\
&= \frac{1}{2} (uv)_P + (uv)_Q + \int_{\xi_0}^{1/\eta_0} \frac{1}{2} v \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{\xi^2} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) d\xi - \int_{\xi_0}^{1/\eta_0} \frac{1}{2} u \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta} \frac{1}{\xi^2} + \frac{v}{\xi} \right) d\xi.
\end{aligned}$$

Используя заданные дополнительные условиями, выполним следующие преобразования:

$$\begin{aligned}
\left[\partial u / \partial \xi + \xi^{-2} \partial u / \partial \eta \right]_{\xi \eta = 1} &= \sqrt{\eta / \xi} \Big|_{\xi \eta = 1} \partial u / \partial y \Big|_{y=1} = \xi^{-1} \psi(\xi), \\
\partial v / \partial \xi + (\partial v / \partial \eta) \xi^{-2} + v / \xi &= \sqrt{\xi_0} / 2 \xi^{3/2}.
\end{aligned}$$

Учитывая, что

$$u(P) = \varphi(\xi_0), \quad u(Q) = \varphi(1/\eta_0), \quad v(P) = 1, \quad v(Q) = \sqrt{\xi_0 \eta_0},$$

получим решение данной задачи в новых переменных

$$u(\xi_0, \eta_0) = \frac{\varphi(\xi_0)}{2} + \frac{\sqrt{\xi_0 \eta_0}}{2} \varphi\left(\frac{1}{\eta_0}\right) - \frac{\sqrt{\xi_0}}{4} \int_{1/\eta_0}^{\xi_0} \frac{\varphi(\xi)}{\xi^{3/2}} d\xi + \frac{\sqrt{\xi_0}}{2} \int_{1/\eta_0}^{\xi_0} \left(\psi(\xi) / \xi^{3/2} \right) d\xi.$$

В старых переменных x, y , эта формула примет вид

$$u(x, y) = \frac{1}{2} \varphi(xy) + \frac{y}{2} \varphi\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{\sqrt{xy}}{4} \int_{xy}^{x/y} \frac{\varphi(z)}{z^{3/2}} dz - \frac{\sqrt{xy}}{2} \int_{xy}^{x/y} \frac{\psi(z)}{z^{3/2}} dz.$$

$$\text{Ответ. } u(x, y) = \frac{1}{2} \varphi(xy) + \frac{y}{2} \varphi\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{\sqrt{xy}}{4} \int_{xy}^{x/y} \frac{\varphi(z)}{z^{3/2}} dz - \frac{\sqrt{xy}}{2} \int_{xy}^{x/y} \frac{\psi(z)}{z^{3/2}} dz.$$

Критерии оценивания:

- построение функции Римана;
- условия применения формулы Римана;
- построение формулы Римана для данной задачи.

Компетенции (индикаторы): ОПК-1, ОПК-2.

Экспертное заключение

Представленный комплект оценочных материалов по дисциплине «Уравнения математической физики» соответствует требованиям ФГОС ВО.

Предлагаемые оценочные материалы адекватны целям и задачам реализации основной профессиональной образовательной программы по направлению подготовки 01.03.03 Механика и математическое моделирование.

Виды оценочных средств, включенные в представленный фонд, отвечают основным принципам формирования ФОС.

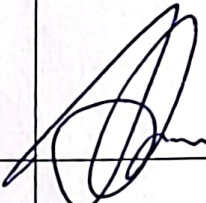
Разработанные и представленные для экспертизы оценочные материалы рекомендуются к использованию в процессе подготовки обучающихся по указанному направлению.

Председатель учебно-методической комиссии
института компьютерных систем и
информационных технологий



Ветрова Н. Н.

Лист изменений и дополнений

№ п/п	Виды дополнений и изменений	Дата и номер протокола заседания кафедры (кафедр), на котором были рассмотрены и одобрены изменения и дополнения	Подпись (с расшифровкой) заведующего кафедрой (заведующих кафедрами)
1.	Дополнен комплектом оценочных материалов	протокол заседания кафедры прикладной математики № <u>8</u> от <u>24.01.2025</u>	 В.В. Малый