

**Комплект оценочных материалов по дисциплине
«Современные проблемы прикладной математики и информатики»**

Задания закрытого типа

Задания закрытого типа на выбор правильного ответа

1. Вырожденной матрицей называется квадратная матрица, определитель которой равен:

А) 0

Б) 1

В) 2

Г) 3

Правильный ответ: А

Компетенции: УК-1, ОПК-1

2. Укажите не входящее в определение корректности по Адамару утверждение:

А) Непрерывная зависимость решения от оператора задачи, правой части, начального условия

Б) Существование решения при любых допустимых исходных данных

В) Единственность решения

Г) Наличие нескольких решений

Правильный ответ: Г

Компетенции: УК-1, ОПК-1

3. Укажите неверное утверждение относительно нормы вектора x :

А) $\|x\| \geq 0$

Б) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

В) $\|x\| < 0$

Г) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$

Правильный ответ: В

Компетенции: УК-1, ОПК-1

4. Укажите основное свойство обратной матрицы:

А) $A \cdot A = 0$

Б) $A \cdot A^{-1} = E$

В) $A \cdot A = E$

Г) $A \cdot E = E$

Правильный ответ: Б

Компетенции: УК-1, ОПК-1

Задание закрытого типа на установление соответствия

1. Установите правильное соответствие. Каждому элементу левого столбца соответствует только один элемент правого столбца.

Обозначение нормы	Математическое выражение
1) $\ x\ _1$	А) $\max_{i=1,n} x_i $
2) $\ x\ _2$	Б) $\left[\sum_{i=1}^n x_i ^p \right]^{\frac{1}{p}}$
3) $\ x\ _p$	В) $\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i ^2}$
4) $\ x\ _\infty$	Г) $\sum_{i=1}^n x_i $

Правильный ответ:

1	2	3	4
Г	В	Б	А

Компетенции: УК-1, ОПК-1

2. Установите правильное соответствие. Каждому элементу левого столбца соответствует только один элемент правого столбца.

Обозначение нормы	Математическое выражение
1) $\ f\ _1$	А) $\left[\int_a^b f(x) ^p dx \right]^{\frac{1}{p}}$
2) $\ f\ _2$	Б) $\sup_{x \in [a,b]} f(x) $
3) $\ f\ _p$	В) $\int_a^b f(x) dx$
4) $\ f\ _\infty$	Г) $\sqrt{\int_a^b f(x) ^2 dx}$

Правильный ответ:

1	2	3	4
В	Г	А	Б

Компетенции: УК-1, ОПК-1

3. Установите правильное соответствие. Каждому элементу левого столбца соответствует только один элемент правого столбца.

Наименование разложения	Матричная запись
1) Разложение Холецкого	А) $A = QR$
2) LU-разложение	Б) $A = U \Sigma V^T$
3) Сингулярное разложение	В) $A = LU$
4) QR-разложение	Г) $A = U^T U$

Правильный ответ:

1	2	3	4
Г	В	Б	А

Компетенции: УК-1, ОПК-1

4. Установите правильное соответствие. Каждому элементу левого столбца соответствует только один элемент правого столбца.

Наименование уравнения	Математическая запись
1) Интегральное уравнение Фредгольма первого рода	А) $\int_a^x K(x, y)f(y)dy = g(x)$
2) Интегральное уравнение Фредгольма второго рода	Б) $f(x) = \lambda \int_a^b K(x, y)f(y)dy + g(x)$
3) Интегральное уравнение Вольтерра первого рода	В) $\int_a^b K(x, y)f(y)dy = g(x)$
4) Интегральное уравнение Вольтерра второго рода	Г) $f(x) = \lambda \int_a^x K(x, y)f(y)dy + g(x)$

Правильный ответ:

1	2	3	4
В	Б	А	Г

Компетенции: УК-1, ОПК-1

Задания закрытого типа на установление правильной последовательности

1. Расположите в порядке возрастания значения норм вектора $x = (3 \ 4)^T$ в различных пространствах:

- А) $\|x\|_1$
- Б) $\|x\|_2$
- В) $\|x\|_3$
- Г) $\|x\|_\infty$

Правильный ответ: Г, В, Б, А

Компетенции: УК-1, ОПК-1

2. Расположите в порядке возрастания значения норм векторов в евклидовом пространстве:

А) $x = (8 \ -15)^T$

Б) $x = (-6 \ -8)^T$

В) $x = (-3 \ 4)^T$

Г) $x = (12 \ 5)^T$

Правильный ответ: В, Г, Б, А

Компетенции: УК-1, ОПК-1

3. Расположите в порядке возрастания значения определителей:

А) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$

Б) $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$

В) $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$

Г) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$

Правильный ответ: В, А, Б, Г

Компетенции: УК-1, ОПК-1

4. Расположите в порядке возрастания значения $\|A\|_1$:

А) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

Б) $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

В) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

Г) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

Правильный ответ: Г, Б, А, В

Компетенции: УК-1, ОПК-1

Задания открытого типа

Задания открытого типа на дополнение

1. Регуляризация – метод добавления дополнительных ограничений к условию с целью обеспечения возможности решения _____ поставленной задачи.

Правильный ответ: некорректно

Компетенции: УК-1, ОПК-1

2. При сингулярном разложении матрицы $A = U \Sigma V^T$ диагональные элементы матрицы Σ называются _____ числами.

Правильный ответ: сингулярными

Компетенции: УК-1, ОПК-1

3. Утверждение о существовании и единственности для любой матрицы над действительными и комплексными числами _____ матрицы носит название теоремы Мура-Пенроуза.

Правильный ответ: псевдообратной

Компетенции: УК-1, ОПК-1

4. Построение псевдообратной матрицы тесно связано с методом _____ квадратов для системы линейных уравнений.

Правильный ответ: наименьших

Компетенции: УК-1, ОПК-1

5. Матрицы с большим числом _____ называются плохо обусловленными, и наоборот, матрицы с малым значением – хорошо обусловленными.

Правильный ответ: обусловленности

Компетенции: УК-1, ОПК-1

Задания открытого типа с кратким свободным ответом

1. Как называется ненулевой вектор, который при умножении на некоторую квадратную матрицу превращается в самого же себя с числовым коэффициентом?

Правильный ответ: собственный вектор

Компетенции: УК-1, ОПК-1

2. Как называется совокупность всех собственных чисел матрицы?

Правильный ответ: спектр

Компетенции: УК-1, ОПК-1

3. Запишите выражение, связывающее число обусловленности матрицы $\text{cond}(A)$, ее норму $\|A\|$, и норму обратной к ней матрицы $\|A^{-1}\|$.

Правильный ответ: $\text{cond}(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$

Компетенции: УК-1, ОПК-1

4. Пусть известно сингулярное разложение матрицы $A = U \Sigma V^T$, записать выражение для псевдообратной матрицы A^+ через Σ^+ .

Правильный ответ: $A^+ = V \Sigma^+ U^T$

Компетенции: УК-1, ОПК-1

5. Пусть дана диагональная матрица

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

записать псевдообратную матрицу к ней.

Правильный ответ:

$$\Sigma^+ = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Компетенции: УК-1, ОПК-1

Задания открытого типа с развернутым ответом

1. Пусть дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Убедится в том, что матрицы

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \Sigma = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ и } V^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sqrt{0,2} & 0 & 0 & 0 & \sqrt{0,8} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sqrt{0,8} & 0 & 0 & 0 & \sqrt{0,2} \end{pmatrix}$$

дают сингулярное разложение матрицы A .

Привести расширенное решение.

Время выполнения – 30 мин.

Ожидаемый результат:

Прямой проверкой убедимся в том, что матрицы U и V^T являются унитарными, т.е. $UU^T = E$ и $V^TV = E$:

$$UU^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E,$$

$$V^TV = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sqrt{0,2} & 0 & 0 & 0 & \sqrt{0,8} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sqrt{0,8} & 0 & 0 & 0 & \sqrt{0,2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sqrt{0,2} & 0 & -\sqrt{0,8} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{0,8} & 0 & \sqrt{0,2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Матрица Σ является диагональной матрицей подходящего размера. Проверим выполнение соотношения $A = U\Sigma V^T$, для этого в начале вычислим

$$U\Sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

затем окончательно

$$U \Sigma V^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sqrt{0,2} & 0 & 0 & 0 & \sqrt{0,8} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sqrt{0,8} & 0 & 0 & 0 & \sqrt{0,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A.$$

Правильный ответ: приведенные матрицы действительно дают сингулярное разложение матрицы A .

Компетенции: УК-1, ОПК-1

2. Найти число обусловленности матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

по норме $\|x\|_\infty$.

Привести расширенное решение.

Время выполнения – 30 мин.

Ожидаемый результат:

Найдем обратную матрицу к матрице A . Данная матрица является блочной диагональной матрицей, нахождение ее обратной сводится к нахождению обратных матриц к отдельным блокам:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдем нормы матриц A и A^{-1} :

$$\|A\|_\infty = \max_i \sum_j |a_{ij}| = \max\{2, 3, 3, 7\} = 7,$$

$$\|A^{-1}\|_\infty = \max\{3, 2, 7, 3\} = 7.$$

Вычислим число обусловленности

$$\text{cond}(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\| = 7 \cdot 7 = 49.$$

Правильный ответ: $\text{cond}(A) = 49$.

Компетенции: УК-1, ОПК-1

Экспертное заключение

Представленный комплект оценочных материалов по дисциплине «Современные проблемы прикладной математики и информатики» соответствует требованиям ФГОС ВО.

Предлагаемые оценочные материалы адекватны целям и задачам реализации основной профессиональной образовательной программы по направлению подготовки 01.04.02 Прикладная математика и информатика.

Виды оценочных средств, включенные в представленный фонд, отвечают основным принципам формирования ФОС.

Разработанные и представленные для экспертизы оценочные материалы рекомендуются к использованию в процессе подготовки обучающихся по указанному направлению.

Председатель учебно-методической комиссии
института компьютерных систем и
информационных технологий

Ветрова Н. Н.

Лист изменений и дополнений

№ п/п	Виды дополнений и изменений	Дата и номер протокола заседания кафедры (кафедр), на котором были рассмотрены и одобрены изменения и дополнения	Подпись (с расшифровкой) заведующего кафедрой (заведующих кафедрами)
1.	Дополнен комплектом оценочных материалов	протокол заседания кафедры прикладной математики № <u>8</u> от <u>24. 02. 2025</u>	 В.В. Малый