

**Комплект оценочных материалов по дисциплине
«Случайные процессы»**

Задания закрытого типа

Задания закрытого типа на выбор правильного ответа

1. Выберите один правильный ответ

Какой из перечисленных параметров характеризует случайный процесс?

А) Математическое ожидание

Б) Скорость

В) Температура

Г) Цвет

Правильный ответ: А

Компетенции: ОПК-1, ПК-2

2. Выберите один правильный ответ

Что означает стационарность случайного процесса?

А) Процесс имеет постоянные параметры со временем

Б) Процесс движется только в одном направлении

В) Процесс изменяет свою природу со временем

Г) Статистические свойства процесса не зависят от времени

Правильный ответ: Г

Компетенции: ОПК-1, ПК-2

3. Выберите один правильный ответ

Какое из утверждений верно для марковского процесса?

А) Текущее состояние зависит только от предыдущего состояния

Б) Текущее состояние зависит от всех предыдущих состояний

В) Текущее состояние не зависит от предыдущего состояния

Г) Текущее состояние зависит только от текущего времени

Правильный ответ: Г

Компетенции: ОПК-1, ПК-2

4. Выберите один правильный ответ

Что представляет собой корреляционная функция случайного процесса?

А) Вероятность наступления события

Б) Совокупность случайных величин

В) Сумма случайных процессов

Г) Мера взаимосвязи между значениями процесса в различные моменты времени

Правильный ответ: Г

Компетенции: ОПК-1, ПК-2

5. Выберите один правильный ответ

Что такое случайный блуждание?

- А) Процесс, который всегда движется в одном направлении
- Б) Процесс с постоянными параметрами
- В) Процесс, в котором изменения происходят случайным образом
- Г) Процесс, который движется в обратном направлении

Правильный ответ: В

Компетенции: ОПК-1, ПК-2

6. Выберите один правильный ответ

Что такое марковский случайный процесс?

А) Это процесс, в котором все вероятности остаются постоянными со временем.

Б) Марковский процесс не имеет отношения к теории случайных процессов

В) Это случайный процесс, для которого условное распределение будущих значений зависит только от текущего состояния и не зависит от предыдущих значений.

Г) Марковский процесс обязательно имеет дискретное множество состояний.

Правильный ответ: В

Компетенции: ОПК-1, ПК-2

7. Выберите один правильный ответ

Какой из следующих параметров характеризует интенсивность случайного процесса?

А) Математическое ожидание;

Б) Интенсивность случайного процесса обычно измеряется средним числом событий в единицу времени;

В) Дисперсия;

Г) Амплитуда.

Правильный ответ: Б

Компетенции: ОПК-1, ПК-2

8. Выберите один правильный ответ

Каковы основные параметры распределения вероятностей в случайных процессах?

А) Среднее значение и стандартное отклонение

Б) Максимальное и минимальное значения

В) Квартили и медиана

Г) Математическое ожидание и дисперсия

Правильный ответ: Г

Компетенции: ОПК-1, ПК-2

9. Выберите все правильные варианты ответов

Если случайный процесс является стационарным, то

А) он является также стационарным в широком смысле

Б) он является также гауссовским

В) он является также винеровским

Г) его дисперсия равна константе

Правильный ответ: А, Г.

Компетенции: ОПК-1, ПК-2

10. Выберите все правильные варианты ответов

Винеровский процесс является

А) гауссовским

Б) процессом с независимыми приращениями

В стационарным в широком смысле

Г) процессом с нулевым математическим ожиданием

Правильный ответ: А, Б

Компетенции: ОПК-1, ПК-2

3. Выберите все правильные варианты ответов

Какие из приведенных ниже функций $R(\tau)$ не могут быть корреляционными функциями некоторого стационарного в широком смысле случайного процесса?

А) $R(\tau) = e^{-|\tau|}$

Б) $R(\tau) = 0,8^\tau$

В) $R(\tau) = \frac{\sin^2 \tau}{\tau}$

Г) $R(\tau) = 0,8^{|\tau|}$

Правильный ответ: Б, В, Г

Компетенции: ОПК-1, ПК-2

4. Выберите все правильные варианты ответов

Если случайный процесс является стационарным в узком смысле, то

А) он является также стационарным в широком смысле

Б) он является также гауссовским

В) он является также пуассоновским

Г) его математическое ожидание равно константе

Правильный ответ: А, Г

Компетенции: ОПК-1, ПК-2

Задания закрытого типа на установление соответствия

1 Установите соответствие между процессом и его корреляционной функцией:

1) Винеровский процесс	А) $R(\tau) = \sigma^2 \delta(\tau)$
2) Пуассоновский процесс	Б) $R(\tau) = \min(t_1, t_2)$
3) Стационарный процесс	В) $R(\tau) = \lambda \min(t_1, t_2)$
4) Белый шум	Г) $R(\tau)$ зависит только от разности аргументов

Правильный ответ:

1	2	3	4
Б	В	Г	А

Компетенции: ОПК-1, ПК-2

2. Установите соответствие между процессом и его математическим ожиданием:

1) Винеровский процесс	А) λt
2) Пуассоновский процесс	Б) 0
3) Стационарный процесс	В) Постоянное значение
4) Белый шум	Г) Не определено

Правильный ответ:

1	2	3	4
Б	А	В	Г

Компетенции: ОПК-1, ПК-2

3. Установите соответствие между процессом и его свойствами:

1) Винеровский процесс	А) Независимые приращения
2) Пуассоновский процесс	Б) Нормальные конечномерные распределения
3) Гауссовский процесс	В) Отсутствие последействия
4) Марковский процесс	Г) Интенсивность λ

Правильный ответ:

1	2	3	4
А	Г	Б	В

Компетенции: ОПК-1, ПК-2

4. Установите соответствие между процессом и его спектральной характеристикой:

1) Белый шум	А) Спектральная плотность постоянна
2) Стационарный процесс	Б) Спектральная плотность связана с корреляционной функцией через преобразование Фурье
3) Винеровский процесс	В) Спектральная плотность не определена
4) Марковский процесс	Г) Спектральная плотность зависит от частоты

Правильный ответ:

1	2	3	4
А	Б	В	Г

Компетенции: ОПК-1, ПК-2

5. Установите соответствие между процессом и его математическим описанием:

1) Винеровский процесс	А) $P(\xi(t) = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$
2) Пуассоновский процесс	Б) $W(t)$ - процесс с независимыми приращениями и нормальным распределением
3) Гауссовский процесс	В) $X(t)$ - процесс с конечномерными нормальными распределениями
4) Марковский процесс	Г) $P(X(t) X(s)) = P(X(t) X(s), X(u))$ для $u < s < t$

Правильный ответ:

1	2	3	4
Б	А	В	Г

Компетенции: ОПК-1, ПК-2

Задания закрытого типа на установление правильной последовательности

1. Укажите порядок шагов при решении задачи о прохождении стационарного процесса через линейную систему

- А) Найти спектральную плотность входного процесса
- Б) Определить передаточную функцию системы
- В) Вычислить спектральную плотность выходного процесса
- Г) Рассчитать корреляционную функцию выходного процесса

Правильный порядок: Б, А, В, Г

Компетенции: ОПК-1, ПК-2

2. Укажите последовательность этапов построения модели Марковского процесса:

- А) Задание начального распределения
- Б) Определение матрицы переходных вероятностей
- В) Решение уравнений Колмогорова
- Г) Расчет финальных вероятностей

Правильный порядок: А, Б, В, Г

Компетенции: ОПК-1, ПК-2

3. Укажите порядок шагов при исследовании эргодичности случайного процесса:

А) Проверить стационарность процесса

Б) Убедиться, что усреднение по времени совпадает с усреднением по ансамблю

В) Вычислить математическое ожидание и дисперсию

Г) Проверить выполнение условий эргодичности

Правильный порядок: А, Г, Б, В

Компетенции: ОПК-1, ПК-2

Задания открытого типа

Задания открытого типа на дополнение

1. Напишите пропущенное слово (словосочетание).

Математическое ожидание стационарного процесса является _____ функцией времени.

Правильный ответ: постоянной

Компетенции: ОПК-1, ПК-2

2. Напишите пропущенное слово (словосочетание).

Для гауссовского процесса все конечномерные распределения являются _____

Правильный ответ: нормальными

Компетенции: ОПК-1, ПК-2

3. Напишите пропущенное слово (словосочетание).

Спектральная плотность белого шума равна _____

Правильный ответ: константе

Компетенции: ОПК-1, ПК-2

4. Напишите пропущенное слово (словосочетание).

Уравнение, связывающее спектральную плотность и корреляционную функцию, называется _____

Правильный ответ: формулой Винера-Хинчина

Компетенции: ОПК-1, ПК-2

5. Напишите пропущенное слово (словосочетание).

Процесс с независимыми приращениями и непрерывными траекториями называется _____

Правильный ответ: винеровским

Компетенции: ОПК-1, ПК-2

6. Напишите пропущенное слово (словосочетание).

Математическое ожидание стационарного процесса является _____ функцией времени

Правильный ответ: постоянной

Компетенции: ОПК-1, ПК-2

7. Напишите пропущенное слово (словосочетание).

Если процесс $\xi(\omega, t)$ стационарен, то его корреляционная функция зависит только от _____

Правильный ответ: разности аргументов $\tau = t_2 - t_1$

Компетенции: ОПК-1, ПК-2

Задания открытого типа с кратким свободным ответом

1. Корреляционная функция процесса $X(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$, где φ равномерно распределена на $[0, 2\pi]$. Найдите корреляционную функцию случайного процесса $X'(t)$

Правильный ответ: $\frac{A^2}{2} \cos(\omega \tau)$.

Компетенции: ОПК-1, ПК-2

2. Интенсивность пуассоновского процесса равна 5 событиям в час. Каково математическое ожидание числа событий за 3 часа?

Правильный ответ: 15

Компетенции: ОПК-1, ПК-2

3. Пусть $\xi(t) = \gamma \cos \omega t$ случайный процесс. $M\gamma = 0$; $D\gamma = \sigma^2$; $\omega = \text{const}$. Найдите дисперсию процесса.

Правильный ответ: $D(t) = D\xi(t) = \sigma^2 \cos^2 \omega t$

Компетенции: ОПК-1, ПК-2

4. Случайные процессы $\eta(t)$ и $\xi(t)$ связаны соотношением $\eta(t) = \int_0^t \xi(s) ds$, найти $m_\eta(t)$, если $m_\xi(t) = t^2 - 3$.

Правильный ответ: $m_\eta(t) = \frac{(t^2 - 9)t}{3}$

Компетенции: ОПК-1, ПК-2

5. Случайный процесс задан спектральной плотностью

$$S_\xi(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{\omega_2 - \omega_1}, & \omega_1 < \omega < \omega_2 \\ 0, & \omega \notin (\omega_1, \omega_2) \end{cases}.$$

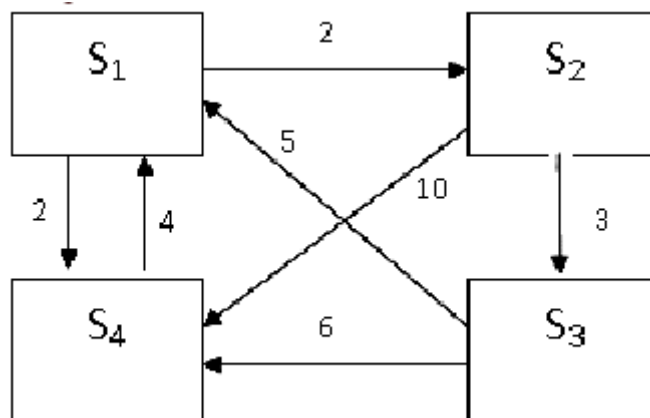
Найти $K_{\xi}(\tau)$.

Правильный ответ: $K_{\xi}(\tau) = \frac{1}{2\omega_2} \cdot \frac{e^{i\omega_2\tau} - e^{i\omega_1\tau}}{i\tau}$

Компетенции: ОПК-1, ПК-2

Задания открытого типа с развернутым ответом

1. Для марковского процесса с дискретными состояниями и непрерывным временем, заданного графом, построить систему дифференциальных уравнений Колмогорова и определить предельные вероятности состояний.



Привести расширенное решение.

Время выполнения – 30 мин.

Ожидаемый результат:

Запишем в общем виде уравнения Колмогорова для вероятностей состояний, воспользовавшись правилом.

Для первого состояния из него выходит две стрелки: во второе и четвертое состояния, и входит две стрелки: из третьего и четвертого состояний. Итак, для него уравнение имеет вид:

$$\frac{dP_1(t)}{dt} = -\lambda_{12}P_1(t) - \lambda_{14}P_1(t) + \lambda_{31}P_3(t) + \lambda_{41}P_4(t)$$

Слагаемые со знаком «-» взяты для стрелок, которые выходят, а со знаком «+» - для стрелок, которые входят. Аналогично запишем уравнение для других состояний.

$$\frac{dP_2(t)}{dt} = -\lambda_{23}P_2(t) - \lambda_{24}P_2(t) + \lambda_{12}P_1(t),$$

$$\frac{dP_3(t)}{dt} = -\lambda_{31}P_3(t) - \lambda_{34}P_3(t) + \lambda_{23}P_2(t),$$

$$\frac{dP_4(t)}{dt} = -\lambda_{41}P_4(t) + \lambda_{14}P_1(t) + \lambda_{24}P_2(t) + \lambda_{34}P_3(t).$$

Заменим интенсивности переходов λ_{ij} их числовыми значениями. Получим следующую систему уравнений.

$$\begin{cases} \frac{dP_1(t)}{dt} = -2P_1(t) - 2P_1(t) + 5P_3(t) + 4P_4(t) \\ \frac{dP_2(t)}{dt} = -13P_2(t) + 2P_1(t) \\ \frac{dP_3(t)}{dt} = -5P_3(t) - 6P_3(t) + 3P_2(t) \\ \frac{dP_4(t)}{dt} = -4P_4(t) + 2P_1(t) + 10P_2(t) + 6P_3(t) \end{cases}$$

После приведения подобных слагаемых система приобретет вид:

$$\begin{cases} \frac{dP_1(t)}{dt} = -4P_1(t) + 5P_3(t) + 4P_4(t) \\ \frac{dP_2(t)}{dt} = -13P_2(t) + 2P_1(t) \\ \frac{dP_3(t)}{dt} = -11P_3(t) + 3P_2(t) \\ \frac{dP_4(t)}{dt} = -4P_4(t) + 2P_1(t) + 10P_2(t) + 6P_3(t) \end{cases}$$

В стационарном режиме вероятности не зависят от времени. Следовательно, левые части уравнений равны нулю. Перепишем систему в виде:

$$\begin{cases} 0 = -4P_1 + 5P_3 + 4P_4 \\ 0 = -13P_2 + 2P_1 \\ 0 = -11P_3 + 3P_2 \\ 0 = -4P_4 + 2P_1 + 10P_2 + 6P_3 \end{cases}$$

Исключим одно из уравнений, например последнее, и заменим его нормировочным. Получим такую систему:

$$\begin{cases} -4P_1 + 5P_3 + 4P_4 = 0 \\ -13P_2 + 2P_1 = 0 \\ -11P_3 + 3P_2 = 0 \\ P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 1 \end{cases}$$

Решив эту систему, получим:

$$\begin{cases} P_1 = 0,47 \\ P_2 = 0,07 \\ P_3 = 0,02 \\ P_4 = 0,44 \end{cases}.$$

$$\text{Ответ: } \begin{cases} P_1 = 0,47 \\ P_2 = 0,07 \\ P_3 = 0,02 \\ P_4 = 0,44 \end{cases}.$$

Критерии оценивания:

– марковский процесс, уравнения Колмогорова, предельные вероятности состояний.

Компетенции: ОПК-1, ПК-2

2. Найти математическое ожидание $m_\xi(t)$, корреляционную функцию $K_\xi(t_1, t_2)$, дисперсию $D_\xi(t)$ случайного процесса $U \operatorname{sh} t - 3e^{-3t} V + t^2$, где U, V – некоррелированные случайные величины, $U \in R(-3; 3)$, $V \in P(1.2)$.

Привести расширенное решение.

Время выполнения – 30 мин.

Ожидаемый результат:

Сначала вычислим м. о. и дисперсии случайных величин U и V :

$$M[U] = \frac{-3+3}{2} = 0, \quad D[U] = \frac{(3+3)^2}{12} = 3, \quad M[V] = D[V] = 1.2.$$

По свойству математическое ожидание от суммы случайных процессов равно сумме математических ожиданий от слагаемых:

$$m_\xi(t) = m_{\operatorname{sh} t \cdot U}(t) + m_{-3e^{-3t} V}(t) + m_{t^2}(t).$$

По свойству математическое ожидание неслучайной функции равно самой функции. Поэтому $m_{t^2}(t) = t^2$. По свойству множитель в виде неслучайной функции выносится за знак математического ожидания. Следовательно,

$$m_{\operatorname{sh} t \cdot U}(t) = \operatorname{sh} t \cdot M[U] = 0, \quad m_{-3e^{-3t} V}(t) = -3e^{-3t} M[V] = -3.6e^{-3t}.$$

В итоге получим

$$m_\xi(t) = -3.6e^{-3t} + t^2.$$

Теперь найдем корреляционную функцию. По свойству прибавление к случайному процессу неслучайной функции t^2 не влияет на корреляционную функцию. Поэтому

$$K_\xi(t_1, t_2) = K_{\operatorname{sh} t \cdot U - 3e^{-3t} V}(t_1, t_2).$$

Так как случайные процессы $U \operatorname{sh} t$ и $-3e^{-3t} V$ некоррелированы из-за некоррелированности случайных величин U, V , получаем

$$K_\xi(t_1, t_2) = K_{\operatorname{sh} t \cdot U}(t_1, t_2) + K_{-3e^{-3t} V}(t_1, t_2).$$

Далее

$$\begin{aligned} K_{\operatorname{sh} t \cdot U}(t_1, t_2) &= \operatorname{sh} t_1 \operatorname{sh} t_2 D[U] = 3 \operatorname{sh} t_1 \operatorname{sh} t_2, \\ K_{-3e^{-3t} V}(t_1, t_2) &= -3e^{-3t_1} (-3)e^{-3t_2} D[V] = 10.8e^{-3t_1} e^{-3t_2}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$K_\xi(t_1, t_2) = 3 \operatorname{sh} t_1 \operatorname{sh} t_2 + 10.8e^{-3(t_1+t_2)}.$$

Дисперсию найдем по свойству $K_{\xi}(t, t) = D_{\xi}(t)$

$$D_{\xi}(t) = K_{\xi}(t, t) = 3 sh^2 t + 10.8 e^{-6t} \text{ [1].}$$

Ответ: $m_{\xi}(t) = -3.6 e^{-3t} + t^2$., $D_{\xi}(t) = 3 sh^2 t + 10.8 e^{-6t}$ [1], $K_{\xi}(t_1, t_2) = 3 sh t_1 sh t_2 + 10.8 e^{-3(t_1+t_2)}$ [1].

Критерии оценивания:

– числовые характеристики случайных процессов: математическое ожидание, дисперсия и корреляционная функция

Компетенции: ОПК-1, ПК-2

Экспертное заключение

Представленный комплект оценочных материалов по дисциплине «Случайные процессы» соответствует требованиям ФГОС ВО.

Предлагаемые оценочные материалы адекватны целям и задачам реализации основной профессиональной образовательной программы по направлению подготовки 01.04.02 Прикладная математика и информатика.

Виды оценочных средств, включенные в представленный фонд, отвечают основным принципам формирования ФОС.

Разработанные и представленные для экспертизы оценочные материалы рекомендуются к использованию в процессе подготовки обучающихся по указанному направлению.

Председатель учебно-методической комиссии
института компьютерных систем и
информационных технологий

Ветрова Н. Н.

Лист изменений и дополнений

№ п/п	Виды дополнений и изменений	Дата и номер протокола заседания кафедры (кафедр), на котором были рассмотрены и одобрены изменения и дополнения	Подпись (с расшифровкой) заведующего кафедрой (заведующих кафедрами)
1.	Дополнен комплектом оценочных материалов	протокол заседания кафедры прикладной математики № <u>8</u> от <u>24.02.2025</u>	 В.В. Малый