

**Комплект оценочных материалов по дисциплине
«Общая теория рядов Фурье»**

Задания закрытого типа

Задания закрытого типа на выбор правильного ответа

1. Выберите один правильный ответ

Дана ортонормированная система $\{e_k\}_1^\infty$ в пространстве со скалярным произведением. Найти угол φ между векторами x и y :

$$x = e_7 - \left(\frac{e_{23}}{2} + \frac{e_{24}}{3}\right), y = 0.5(e_2 - 3e_{24}) + e_7.$$

А) $\arccos \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}$

Б) $\arccos \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{5}}$

В) $\arccos \frac{6\sqrt{2}}{7\sqrt{7}}$

Правильный ответ: В

Компетенции: ОПК-1

2. Выберите один правильный ответ

Найти скалярное произведение (x, y) векторов $x, y \in C_2[a, b]$, если $x(t) = t^2$, $y(t) = 4t^2 + 4t - 1$; $[a, b] = [-1, 1]$.

А) 4

Б) $\frac{14}{15}$

В) $\frac{8}{15}$

Правильный ответ: Б

Компетенции: ОПК-1

3. Выберите один правильный ответ

Найти расстояние $\rho(x, y)$ между элементами $x(t) = t + 1$ и $y(t) = 2t^2 + 1$ евклидова пространства $C_2[0, 1]$.

А) 3

Б) $\sqrt{\frac{2}{15}}$

В) $\sqrt{3}$

Правильный ответ: Б

Компетенции: ОПК-1

4. Выберите один правильный ответ

Пусть L – четырехмерное линейное пространство, $f(x)$ – линейный функционал на L , тождественно не равный нулю. Определить размерность его ядра $\text{Ker} f$, используя понятие фактор-пространства $L/\text{Ker} f$.

А) 2

Б) 1

В) 3

Правильный ответ: В

Компетенции: ОПК-1

Задания закрытого типа на установление соответствия

1. Установите правильное соответствие. Каждому элементу левого столбца соответствует только один элемент правого столбца.

	Множество		Порядковое число (трансфинит)
1)	$a_1, a_2, \dots, a_n$	А)	$\omega + n$
2)	$1, 3, 5, \dots, 2, 4, 6, \dots$	Б)	n
3)	$1, 2, 3, \dots, a_1, a_2, \dots, a_n$	В)	ω
4)	$a_1, a_2, \dots, a_n, 1, 2, 3, \dots$	Г)	$\omega + \omega$

Правильный ответ:

1	2	3	4
Б	Г	А	В

Компетенции: ОПК-1

2. Установите правильное соответствие. Каждому элементу левого столбца соответствует только один элемент правого столбца.

	Вид множества		Мощность множества
1)	$[0, 1]$	А)	n
2)	$a_1, a_2, \dots, a_n$	Б)	$\aleph$
3)	$1, 2, \dots, n, \dots$	В)	$\aleph_0$

Правильный ответ:

1	2	3	4
Б	А	В	Г

Компетенции: ОПК-1

3. Установите правильное соответствие. Каждому элементу левого столбца соответствует только один элемент правого столбца.

	$f(x), g(x) \in C[-2, 1]$		$\rho(f, g) = \max_{-2 \leq x \leq 1} g(x) - f(x) $
1)	$f(x) = x + 1, g(x) = -2x$	А)	10
2)	$f(x) = 3x, g(x) = x^2$	Б)	12
3)	$f(x) = -x^3, g(x) = 2x$	В)	4
4)	$f(x) = (x - 1)^2, g(x) = x^2 + 1$	Г)	5

Правильный ответ:

1	2	3	4
Г	А	Б	В

Компетенции: ОПК-1

4. Установите правильное соответствие. Каждому элементу левого столбца соответствует только один элемент правого столбца.

	$f(x), g(x) \in C_2[-1, 1]$		$\rho(f, g) = \left(\int_{-1}^1 [f(x) - g(x)]^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$
1)	$f(x) = x, g(x) = 2x + 1$	А)	$\sqrt{\frac{2}{3}}$
2)	$f(x) = x^2 + 1, g(x) = x + 1$	Б)	$\sqrt{6}$
3)	$f(x) = x^3, g(x) = x^3 + x$	В)	$\frac{4}{\sqrt{15}}$
4)	$f(x) = x + 2, g(x) = x - 1$	Г)	$\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

Правильный ответ:

1	2	3	4
Г	В	А	Б

Компетенции: ОПК-1

Задания закрытого типа на установление правильной последовательности

1. Расположите скалярные произведения (f, g) функций $f(x), g(x) \in C_2[0, 1]$ в порядке возрастания:

- А) $(f, g), f(x) = x + 1, g(x) = x$
- Б) $(f, g), f(x) = x^2 - 1, g(x) = x + 2$
- В) $(f, g), f(x) = 2x + 1, g(x) = 2x$
- Г) $(f, g), f(x) = x - 1, g(x) = x + 1$

Правильный ответ: Б, Г, В, А

Компетенции: ОПК-1

2. Расположите векторы $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \in l_2$ в порядке возрастания их длины:

- А) $(2, -1, 0, 1, 0, \dots)$
- Б) $(0, -3, 0, \dots)$
- В) $(0, 1, 0, 1, 0, \dots)$
- Г) $(2, -2, 0, \dots)$

Правильный ответ: В, А, Г, Б

Компетенции: ОПК-1

3. Расположите векторы $x(t) \in C[0,1]$ в порядке убывания их длины:

А) $t^2 + 1$

Б) $t^2 - 1$

В) $t^2 + t$

Г) $t^2 - t$

Правильный ответ: В, А, Б, Г

Компетенции: ОПК-1

4. Расположите фактор-пространства L_{10}/L' линейного пространства десяти измерений L_{10} по подпространствам $L' \subset L_{10}$ в порядке возрастания их коразмерности:

А) L_{10}/L_3

Б) L_{10}/L_1

В) L_{10}/L_5

Г) L_{10}/L_8

Правильный ответ: Г, В, А, Б

Компетенции: ОПК-1

Задания открытого типа

Задания открытого типа на дополнение

1. Напишите пропущенное слово (словосочетание).

_____ элемента f по системе $\{\varphi_n\}$ называется ряд $\sum_k c_k \varphi_k$, где $\{\varphi_n\}$ – ортогональная нормированная система в евклидовом пространстве R и f – произвольный элемент из R ; $c_k = (f, \varphi_k)$, $k = 1, 2, \dots$ – коэффициенты Фурье элемента f по системе $\{\varphi_n\}$.

Правильный ответ: рядом Фурье.

Компетенции: ОПК-1

2. Напишите пропущенное слово (словосочетание).

_____ $\sum_1^\infty c_k^2 \ll \|f\|^2$ называется неравенством Бесселя, где $c_k = (f, \varphi_k)$, $k = 1, 2, \dots$, f – произвольный элемент из евклидова пространства R .

Правильный ответ: неравенство.

Компетенции: ОПК-1

3. Напишите пропущенное слово (словосочетание).

Ортогональная нормированная система $\{\varphi_n\}$ называется _____, если для любого $f \in R$, где R – евклидово пространство, справедливо равенство $\sum_1^\infty c_k^2 = \|f\|^2$, $c_k = (f, \varphi_k)$, $k = 1, 2, \dots$

Правильный ответ: замкнутой.

Компетенции: ОПК-1

4. Напишите пропущенное слово (словосочетание).

_____ – это полное евклидово пространство бесконечного числа измерений.

Правильный ответ: гильбертово пространство.

Компетенции: ОПК-1

5. Напишите пропущенное слово (словосочетание).

Для того чтобы нормированное пространство R было _____, необходимо и достаточно, чтобы для любых двух элементов f и g , выполнялось равенство $\|f + g\|^2 + \|f - g\|^2 = 2(\|f\|^2 + \|g\|^2)$.

Правильный ответ: евклидовым.

Компетенции: ОПК-1

Задания открытого типа с кратким свободным ответом

1. Норма элемента $\|x\|_1$, $x = (1, -1, -3, 0, 2)$ равна ... (Ответ запишите в виде числа)

Правильный ответ: 7.

Компетенции: ОПК-1

2. Норма элемента $f(t) = \cos t \in C[0, \frac{\pi}{2}]$ равна ... (Ответ запишите в виде числа)

Правильный ответ: 1.

Компетенции: ОПК-1

3. Скалярное произведение векторов (f, g) , где $f(t) = \sin t$, $g(t) = \cos t \in C[-\pi, \pi]$ равно ... (Ответ запишите в виде числа)

Правильный ответ: 0.

Компетенции: ОПК-1

4. Найти скалярное произведение векторов $x = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots)$ и $y = (0, 1, 1, 0, \dots)$, $x, y \in l_2$ (Ответ запишите в виде числа)

Правильный ответ: $\frac{5}{6}$.

Компетенции: ОПК-1

5. Найти коэффициент a_1 в разложении функции $f(x) = x^2, -\pi \ll x \ll \pi$ в ряд Фурье по полной ортогональной системе $1, \cos nx, \sin nx, n = 1, 2, \dots$ (Ответ запишите в виде числа)

Правильный ответ: -4 .

Компетенции: ОПК-1

Задания открытого типа с развернутым ответом

1. Решить задачу, используя методы общей теории рядов Фурье:

Разложить функцию $f(x) = \frac{\pi-x}{2}$ в промежутке $(0, 2\pi)$.

Привести расширенное решение.

Время выполнения – 30 мин.

Критерии оценивания:

– использование общей формулы

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos mx + b_m \sin mx);$$

– использование формул для коэффициентов Фурье:

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \cos m u du, (m = 0, 1, \dots),$$

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \sin m u du, (m = 1, \dots). \quad (*)$$

Ожидаемый результат:

1. Так как функция $f(x) = \frac{\pi-x}{2}$ дифференцируема на промежутке $(0, 2\pi)$, то имеет место равенство $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos mx + b_m \sin mx)$, $x \in (0, 2\pi)$;

2. По формулам (*) находим:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\pi-x}{2} dx = \frac{1}{2\pi} \left\{ \pi x - \frac{1}{2} x^2 \right\} \Big|_0^{2\pi} = 0,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\pi-x}{2} \cos nx dx = \frac{1}{2\pi} (n-x) \frac{\sin nx}{n} \Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{2n\pi} \int_0^{2\pi} \sin nx dx = 0, \\ (n = 1, 2, 3, \dots),$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\pi-x}{2} \sin nx dx = -\frac{1}{2\pi} (n-x) \frac{\cos nx}{n} \Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{2n\pi} \int_0^{2\pi} \cos nx dx = \frac{1}{n}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{\pi-x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}.$$

Компетенции: ОПК-1

2. Решить задачу, используя методы общей теории рядов Фурье:

Разложить функцию

$$f(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{\pi x}{2}$$

по косинусам в промежутке $[0, \pi]$.

Привести расширенное решение.

Время выполнения – 30 мин.

Критерии оценивания:

- использование общей формулы $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos mx$;
- использование формул для коэффициентов Фурье:

$$a_m = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(u) \cos mu du, (m = 0, 1, \dots), \quad (*)$$

Ожидаемый результат:

1. Так как функция $f(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{\pi x}{2}$ дифференцируема на промежутке $(0, \pi)$, то имеет место равенство $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos mx$, $x \in (0, \pi)$;

2. По формулам (*) находим:

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{x^2}{4} - \frac{\pi x}{2} \right) dx = -\frac{\pi^2}{6}$$

далее (дважды дифференцируя по частям)

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{x^2}{4} - \frac{\pi x}{2} \right) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \left(\frac{x^2}{4} - \frac{\pi x}{2} \right) \frac{\sin nx}{n} \Big|_0^{\pi} - \\ &- \frac{1}{n\pi} \int_0^{\pi} (x - \pi) \sin nx dx = \frac{1}{n^2\pi} (x - \pi) \cos nx \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n^2\pi} \int_0^{\pi} \cos nx dx = \frac{1}{n^2} \\ (n &= 1, 2, 3, \dots). \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } \frac{x^2}{4} - \frac{\pi x}{2} = -\frac{\pi^2}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}.$$

Компетенции: ОПК-1

Экспертное заключение

Представленный комплект оценочных материалов по дисциплине «Общая теория рядов Фурье» соответствует требованиям ФГОС ВО.

Предлагаемые оценочные материалы адекватны целям и задачам реализации основной профессиональной образовательной программы по направлению подготовки 01.04.02 Прикладная математика и информатика.

Виды оценочных средств, включенные в представленный фонд, отвечают основным принципам формирования ФОС.

Разработанные и представленные для экспертизы оценочные материалы рекомендуются к использованию в процессе подготовки обучающихся по указанному направлению.

Председатель учебно-методической комиссии
института компьютерных систем и
информационных технологий

Ветрова Н. Н.

Лист изменений и дополнений

№ п/п	Виды дополнений и изменений	Дата и номер протокола заседания кафедры (кафедр), на котором были рассмотрены и одобрены изменения и дополнения	Подпись (с расшифровкой) заведующего кафедрой (заведующих кафедрами)
1.	Дополнен комплектом оценочных материалов	протокол заседания кафедры прикладной математики № <u>8</u> от <u>24.02.2025</u>	 В.В. Малый