

**Комплект оценочных материалов по дисциплине
«Математические модели природных систем»**

Задания закрытого типа

Задания закрытого типа на выбор правильного ответа

1. Выберите один правильный ответ

Какие природные системы описывает следующая математическая модель:

$$u_{xx} + yu_{yy} + \frac{1}{2}u_y = 0, y < 0.$$

А) стационарные системы теплопроводности

Б) природные системы колебаний

В) нестационарные системы теплопроводности

Правильный ответ: Б

Компетенции (индикаторы): ПК-1, ОПК-3

2. Выберите один правильный ответ

Какого типа краевая задача является математической моделью природной системы колебательного процесса:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t) \text{ для } 0 < x < l, l > 0,$$

$$u(0, t) = \mu_1(t),$$

$$u(l, t) = \mu_2(t), t > 0,$$

$$u(x, 0) = \varphi(x),$$

$$u_t(x, 0) = \psi(x), 0 < x < l.$$

А) третьего типа

Б) первого типа

В) второго типа

Правильный ответ: Б

Компетенции (индикаторы): ПК-1, ОПК-3

3. Выберите один правильный ответ

Какое граничное условие определяет третий тип краевой задачи о моделировании нестационарного процесса распространения тепла $u = u(x, t)$ в тонком стержне

$$u_t = a^2 u_{xx} \text{ при } 0 < x < l, 0 < t \leq T,$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), 0 \leq x \leq l$$

$$u(0, t) = \mu_1(t),$$

А) $u(l, t) = \mu_2(t)$

Б) $\frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = -[u(l, t) - \theta(t)], 0 \leq t \leq T$

В) $\frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = v(t)$

Правильный ответ: Б

Компетенции (индикаторы): ПК-1, ОПК-3

4. Выберите один правильный ответ

Пусть T – некоторый объем, ограниченный поверхностью Σ . Тогда стационарное распределение температуры $u = u(x, y, z)$ внутри T удовлетворяет уравнению

$$\Delta u = -f(x, y, z)$$

и одному из трех типов граничных условий:

А) $u = f_1$ на Σ (первая краевая задача)

Б) $\frac{\partial u}{\partial n} = f_2$ на Σ (вторая краевая задача)

В) $\frac{\partial u}{\partial n} + h(u - f_3) = 0$ на Σ (третья краевая задача)

Какая из указанных краевых задач называется *задачей Неймана*?

Правильный ответ: Б

Компетенции (индикаторы): ПК-1, ОПК-3

Задания закрытого типа на установление соответствия

1. Установите правильное соответствие. Каждому элементу левого столбца соответствует только один элемент правого столбца.

	Функция $f(x, y) \in C^2(R^2)$		Δf
1)	$x^2 - y^2$	А)	$6x$
2)	$x^2 y^2$	Б)	0
3)	$3y^2 x + x^2$	В)	$6xy(y + 1) + 2x^3$
4)	$x^3(y^2 + y)$	Г)	$2y^2 + 2x^2$

Правильный ответ:

1	2	3	4
Б	Г	А	В

Компетенции (индикаторы): ПК-1, ОПК-3

2. Установите правильное соответствие. Каждому элементу левого столбца соответствует только один элемент правого столбца.

	A, B – элементарные множества, принадлежащие прямоугольнику P		Результат теоретико-множественных операций
1)	$A \cup B$	А)	$A \cap (P \setminus B)$
2)	$A \setminus B$	Б)	$P \setminus [(P \setminus A) \cap (P \setminus B)]$
3)	$A \triangle B$	В)	$(A \cup B) \setminus (A \cap B)$

Правильный ответ:

1	2	3
Б	А	В

Компетенции (индикаторы): ПК-1, ОПК-3

3. Установите правильное соответствие. Каждому элементу левого столбца соответствует только один элемент правого столбца.

	$f(x)$ измерима на множестве X с σ – аддитивной мерой μ на σ – алгебре $\mathfrak{G}_\mu CX$, $f^{-1}(A) \in \mathfrak{G}_\mu$, A – произвольное борелевское множество		
1)	$f^{-1}(A \cup B)$	А)	$f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$
2)	$f^{-1}(A \cap B)$	Б)	$f(A) \cup f(B)$
3)	$f(A \cup B)$	В)	$f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$

Правильный ответ:

1	2	3
В	А	Б

Компетенции (индикаторы): ПК-1, ОПК-3

4. Установите правильное соответствие. Каждому элементу левого столбца соответствует только один элемент правого столбца.

	Обобщенная функция $f(x)$		Обобщенная производная $f'(x)$
1)	$\theta(x)$	А)	$-\varphi'(x)$
2)	$\delta(x)$	Б)	0
3)	$c, c \neq 0$	В)	$\delta(x)$

Правильный ответ:

1	2	3
В	А	Б

Компетенции (индикаторы): ПК-1, ОПК-3

5. Установите правильное соответствие. Каждому элементу левого столбца соответствует только один элемент правого столбца.

	Уравнения в обобщенных функциях		Общие решения в $D'(R^1)$
1)	$x^2 u' = 1$	А)	$u = c_1 + c_2 \theta(x) + \ln x $
2)	$xu' = 1$	Б)	$u = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \delta(x - k\pi)$
3)	$(\sin x)u = 0$	В)	$u = c_1 + c_2 \theta(x) + c_3 \delta(x) - P \frac{1}{x}$

Правильный ответ:

1	2	3
В	А	Б

Компетенции (индикаторы): ПК-1, ОПК-3

Задания закрытого типа на установление правильной последовательности

1. Расположите множества, принадлежащие отрезку $[0,1]$, в порядке возрастания (по включению):

А) $\mathfrak{P}(\{[a, b], 0 < a \leq b \leq 1\})$

Б) $\mathfrak{G} = \{(a, b], 0 < a \leq b \leq 1\}$

В) $\mathfrak{N}(\{(a, b], 0 \leq a \leq b \leq 1\})$

Правильный ответ: Б, В, А

Компетенции (индикаторы): ПК-1, ОПК-3

2. Расположите обобщенные функции в порядке возрастания степени их обобщения:

А) $\delta(x)$ – сингулярная обобщенная функция

Б) $\mu\delta_S$ – простой слой на поверхности S с плотностью μ .

В) x^2 – регулярная обобщенная функция

Правильный ответ: В, А, Б

Компетенции (индикаторы): ПК-1, ОПК-3

3. Расположите условия существования свертки $f * g$ в порядке возрастания степени общности:

А) функции f и g интегрируемы на R^n

Б) одна из функций f или g финитна, например, $\text{supp } g \subset U_{R_1}$;

В) функции f и g обращаются в нуль при $x < 0$ ($n = 1$)

Правильный ответ: Б, В, А

Компетенции (индикаторы): ПК-1, ОПК-3

Задания открытого типа

Задания открытого типа на дополнение

1. Напишите пропущенное слово (словосочетание).

_____ есть результат отображения одной абстрактной математической структуры на другую, также абстрактную, либо как результат интерпретации первой модели в терминах и образцах второй.

Правильный ответ: модель.

Компетенции (индикаторы): ПК-2, ОПК-3

2. Напишите пропущенное слово (словосочетание).

_____ описание (и соответственно модель) строится на основе фундаментальных теоретических законов и закономерностей (законы сохранения массы, энергии, законы гидро -, газо -, термодинамики и т.д.).

Правильный ответ: детерминированное.

Компетенции (индикаторы): ПК-2, ОПК-3

3. Напишите пропущенное слово (словосочетание).

_____ описание (и соответственно модель) основано на обработке экспериментальных данных.

Правильный ответ: статистическое.

Компетенции (индикаторы): ПК-2, ОПК-3

4. Напишите пропущенное слово (словосочетание).

_____ называется система $S \in X \times Y$, если задано семейство задач D_x , $x \in X$ с множеством решений Y , для любого элемента $x \in X$, $y \in Y$ пара (x, y) принадлежит системе S тогда и только тогда, когда существует элемент $y \in Y$, который является решением задачи D_x .

Правильный ответ: математической моделью.

Компетенции (индикаторы): ПК-2, ОПК-3

5. Напишите пропущенное слово (словосочетание).

Всякий линейный непрерывный функционал f , определенный на D , где D – пространство бесконечно дифференцируемых финитных функций (пространство основных функций) со сходимостью: последовательность бесконечно дифференцируемых финитных функций φ_n , $n = 1, 2, \dots$, называется сходящейся к бесконечно дифференцируемой финитной функции φ , если:

1) существует отрезок $[a, b]$, вне которого все функции φ_n , $n = 1, 2, \dots$, и φ обращаются в нуль;

2) на этом отрезке последовательность функций φ_n , $n = 1, 2, \dots$, и последовательность всех их производных $\varphi_n^{(k)}$, $n = 1, 2, \dots$, равномерно сходятся соответственно к функции φ и к ее производным $\varphi^{(k)}$, $k = 1, 2, \dots$, называется _____.

Правильный ответ: обобщенной функцией.

Компетенции (индикаторы): ПК-2, ОПК-3

Задания открытого типа с кратким свободным ответом

1. Если f – линейный функционал, то для любых элементов $x \in X$, $y \in X$ и любых чисел λ, μ выполняется требование: $(f, \lambda x + \mu y)$ равно ... (Ответ запишите в виде формулы)

Правильный ответ: $(f, \lambda x + \mu y) = \lambda(f, x) + \mu(f, y)$

Компетенции (индикаторы): ПК-2, ОПК-3

2. Функционал f , определенный на линейном пространстве X со сходимостью, называется непрерывным, если для любой сходящейся

последовательности $x_n \in X$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ выполняется требование: $\lim_{n \rightarrow \infty} (f, x_n)$ равен ... (Ответ запишите в виде формулы)

Правильный ответ: $\lim_{n \rightarrow \infty} (f, x_n) = (f, x)$.

Компетенции (индикаторы): ПК-2, ОПК-3

3. Если f – линейный непрерывный функционал на линейном пространстве X , то его значение $f(0)$ равно ... (Ответ запишите в виде числа)

Правильный ответ: 0.

Компетенции (индикаторы): ПК-2, ОПК-3

4. Если для всех $\varphi \in D$ имеющих носитель в интервале (a, b) , выполняется равенство $(f, \varphi) = 0$, то говорят, что обобщенная функция f обращается в нуль на ... (Ответ запишите в виде интервала)

Правильный ответ: (a, b) .

Компетенции (индикаторы):

5. Производная $(f^{(k)}, \varphi)$ обобщенной функции k -го порядка $f^{(k)} = (f^{(k-1)})'$, $k = 1, 2, \dots$, $f^{(0)} = f$ равна ... (Ответ запишите в виде формулы)

Правильный ответ: $(f^{(k)}, \varphi) = (-1)^k (f, \varphi^{(k)})$, $\varphi \in D$, $k = 0, 1, \dots$.

Компетенции (индикаторы): ПК-2, ОПК-3

Задания открытого типа с развернутым ответом

1. Решить задачу, используя методы теории математических моделей природных систем:

Введем линейный функционал $P \frac{1}{x}$, действующий по формуле

$$\left(P \frac{1}{x}, \varphi \right) = Vp \int \frac{\varphi(x)}{x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\infty} \right) \frac{\varphi(x)}{x} dx, \quad \varphi \in D(R^1).$$

Получить формулы Сохоцкого.

Привести расширенное решение.

Время выполнения – 30 мин.

Ожидаемый результат:

1. Пусть $\varphi_k \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$ в D , т.е. $\varphi_k = 0$, $|x| > R$ и $D^\alpha \varphi_k(x) \xrightarrow{R^1} 0$, $k \rightarrow \infty$

Тогда

$$\begin{aligned} \left| \left(P \frac{1}{x}, \varphi \right) \right| &= \left| Vp \int \frac{\varphi_k(x)}{x} dx \right| = \left| Vp \int_{-R}^R \frac{\varphi_k(0) + x\varphi'_k(x')}{x} dx \right| \leq \\ &\leq \int_{-R}^R |\varphi'_k(x')| dx \leq 2R \max_{|x| \leq R} |\varphi'_k(x)| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

2. Таким образом, $P \frac{1}{x} \in D'$. Обобщенная функция $P \frac{1}{x}$ совпадает с функцией $\frac{1}{x}$ при $x \neq 0$. Она называется *главным значением интеграла* от $\frac{1}{x}$.

3. Установим теперь равенство

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int \frac{\varphi(x)}{x + i\varepsilon} dx = -i\pi\varphi(0) + Vp \int \frac{\varphi(x)}{x} dx, \quad \varphi \in D. \quad (*)$$

Действительно, если $\varphi(x) = 0$ при $|x| > R$, то

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int \frac{\varphi(x)}{x + i\varepsilon} dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-R}^R \frac{x - i\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} \varphi(x) dx = \\ &= \varphi(0) \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-R}^R \frac{x - i\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} dx + \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-R}^R \frac{x - i\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} [\varphi(x) - \varphi(0)] dx = \\ &= -2\varphi(0) \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \operatorname{arctg} \frac{R}{\varepsilon} + \int \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx = -i\pi\varphi(0) + Vp \int \frac{\varphi(x)}{x} dx. \end{aligned}$$

Соотношение (*) означает, что существует предел последовательности $\frac{1}{x + i\varepsilon}$, $\varepsilon \rightarrow +0$ в D' , который мы обозначим $\frac{1}{x + i0}$, и этот предел равен

$-i\pi\delta(x) + P \frac{1}{x}$. Итак,

$$\frac{1}{x + i0} = -i\delta(x) + P \frac{1}{x}.$$

Аналогично,

$$\frac{1}{x - i0} = i\delta(x) + P \frac{1}{x}.$$

Ответ: $\frac{1}{x + i0} = -i\delta(x) + P \frac{1}{x}$, $\frac{1}{x - i0} = i\delta(x) + P \frac{1}{x}$.

Критерии оценивания:

- использование структуры основного пространства $D(R^1)$;
 - использование понятия обобщенной функции;
 - использование понятия линейного функционала;
- Компетенции (индикаторы): ПК-1, ПК-2, ОПК-3

2. Решить задачу, используя методы теории математических моделей природных систем:

Найти преобразования Фурье $F[\operatorname{sign} x]$ и $F\left[\mathcal{P}\frac{1}{x}\right]$.

Привести расширенное решение.

Время выполнения – 30 мин.

Ожидаемый результат:

1. Очевидно, что $\operatorname{sign} x = \theta(x) - \theta(-x)$; используя свойство линейности преобразования Фурье, будем иметь

$$\begin{aligned} F[\operatorname{sign} x] &= F[\theta(x) - \theta(-x)] = F[\theta(x)] - F[\theta(-x)] = \\ &= F[\theta(x)] - F[\theta(x)](-\xi) \end{aligned};$$

$$2. F[\theta(x)] = \pi\delta(\xi) + i\mathcal{P}\frac{1}{\xi}, \quad F[\theta(-x)] = F[\theta(x)](-\xi) = \pi\delta(\xi) - i\mathcal{P}\frac{1}{\xi}.$$

Итак

$$F[\operatorname{sign} x] = 2i\mathcal{P}\frac{1}{\xi}.$$

3. Легко видеть, что $F^{-1}[F[\operatorname{sign} \xi]] = \operatorname{sign} \xi$;

$$F^{-1}\left[2i\mathcal{P}\frac{1}{x}\right] = 2iF^{-1}\left[\mathcal{P}\frac{1}{x}\right] = \frac{2i}{2\pi}F\left[\mathcal{P}\frac{1}{(-x)}\right] = -\frac{i}{\pi}F\left[\mathcal{P}\frac{1}{x}\right]; \quad \operatorname{sign} \xi = -\frac{i}{\pi}F\left[\mathcal{P}\frac{1}{x}\right].$$

Окончательно

$$F\left[\mathcal{P}\frac{1}{x}\right] = \pi i \operatorname{sign} \xi.$$

$$\text{Ответ: } F[\operatorname{sign} x] = 2i\mathcal{P}\frac{1}{\xi}, \quad F\left[\mathcal{P}\frac{1}{x}\right] = \pi i \operatorname{sign} \xi.$$

Критерии оценивания:

- использование понятия абсолютно интегрируемой функции на R^n .
- использование понятия обобщенных функций медленного роста;

– использование определения преобразование Фурье обобщенных функций медленного роста;

Компетенции (индикаторы): ПК-1, ПК-2, ОПК-3.

Экспертное заключение

Представленный комплект оценочных материалов по дисциплине «Математические модели природных систем» соответствует требованиям ФГОС ВО.

Предлагаемые оценочные материалы адекватны целям и задачам реализации основной профессиональной образовательной программы по направлению подготовки 01.04.02 Прикладная математика и информатика.

Виды оценочных средств, включенные в представленный фонд, отвечают основным принципам формирования ФОС.

Разработанные и представленные для экспертизы оценочные материалы рекомендуются к использованию в процессе подготовки обучающихся по указанному направлению.

Председатель учебно-методической комиссии
института компьютерных систем и
информационных технологий

Ветрова Н. Н.

Лист изменений и дополнений

№ п/п	Виды дополнений и изменений	Дата и номер протокола заседания кафедры (кафедр), на котором были рассмотрены и одобрены изменения и дополнения	Подпись (с расшифровкой) заведующего кафедрой (заведующих кафедрами)
1.	Дополнен комплект оценочных материалов	протокол заседания кафедры прикладной математики № <u>8</u> от <u>24.02.2025</u>	 В.В. Малый