

**Комплект оценочных материалов по дисциплине
«Прикладные аспекты теории вычетов»**

Задания закрытого типа

Задания закрытого типа на выбор правильного ответа

1. Выберите один правильный ответ

Вычислить $\sqrt[3]{-1}$

А) $\frac{\sqrt[3]{2}}{2} + i\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt[3]{2}}{2}$

Б) $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt[3]{2}}{2}, -1, \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt[3]{2}}{2}$

В) $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt[3]{2}}{2}, -1, -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt[3]{2}}{2}$

Правильный ответ: Б

Компетенции: ОПК-1

2. Выберите один правильный ответ

Найти аналитическую функцию $w = u(x, y) + v(x, y)$ по известной мнимой части $v = x + y$ и дополнительному условию $w(0) = 0$.

А) $iz - 2$

Б) $z^2 + 2z$

В) $z - 2iz^2$

Г) $z + iz$

Правильный ответ: Г

Компетенции: ОПК-1

3. Выберите один правильный ответ

Найти образ окружности $|z| = 3$ при отображении $w = u + iv = \frac{3}{z}$.

А) $Im w > 0$

Б) $u^2 + v^2 = 1$

В) $\frac{1}{u^2} + \frac{1}{v^2} = 1$

Правильный ответ: Б

Компетенции: ОПК-1

4. Выберите один правильный ответ

Найти вычеты функции $f(z) = \frac{1}{z^2 + 4}$.

А) $4i, -4i$

Б) $-\pi i; \pi i$

В) $\frac{i}{4}; -\frac{i}{4}$

Правильный ответ: В

Компетенции: ОПК-1

Задания закрытого типа на установление соответствия

1. Установите правильное соответствие. Каждому элементу левого столбца соответствует только один элемент правого столбца.

	Вычислить		Ответ
1)	$ 2 + i $	А)	2
2)	$ 2i $	Б)	$\sqrt{5}$
3)	$ 3 - i $	В)	$\sqrt{2}$
4)	$ i + 1 $	Г)	$\sqrt{10}$

Правильный ответ:

1	2	3	4
Б	А	Г	В

Компетенции: ОПК-1

2. Установите правильное соответствие. Каждому элементу левого столбца соответствует только один элемент правого столбца.

	Число		Аргумент
1)	$-i$	А)	π
2)	-1	Б)	$-\frac{\pi}{2}$
3)	$-1 + i$	В)	$\frac{5\pi}{4}$
4)	$-1 - i$	Г)	$\frac{3\pi}{4}$

Правильный ответ:

1	2	3	4
Б	А	Г	В

Компетенции: ОПК-1

3. Установите правильное соответствие. Каждому элементу левого столбца соответствует только один элемент правого столбца.

	$f(z)$		$f'(z)$
1)	$\sin z^2$	А)	$-\frac{1}{(z+2)^2}$
2)	$\frac{1}{z+2}$	Б)	$\frac{2z+1}{z^2+z+1}$
3)	$\ln(z^2+z+1)$	В)	$e^{\pi z} \pi$
4)	$e^{\pi z}$	Г)	$2z \cos z^2$

Правильный ответ:

1	2	3	4
---	---	---	---

Г	А	Б	В
---	---	---	---

Компетенции: ОПК-1

4. Установите правильное соответствие. Каждому элементу левого столбца соответствует только один элемент правого столбца.

	Функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$		Действительная часть функции $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$
1)	$z^2 - 1$	А)	$e^{-x} \cos y + x$
2)	$\ln z + 1$	Б)	$(e^y + e^{-y}) \cos x$
3)	$e^{-z} + z$	В)	$\ln \sqrt{x^2 + y^2} + 1$
4)	$2 \cos z$	Г)	$x^2 - y^2 - 1$

Правильный ответ:

1	2	3	4
Г	В	А	Б

Компетенции: ОПК-1

Задания закрытого типа на установление правильной последовательности

1. Расположите модули комплексных чисел $z = x + iy$ в порядке возрастания:

- А) $|2i + 3|$
- Б) $|2e^{i\pi}|$
- В) $|i^2 + i + 1|$
- Г) $\left|\frac{i}{3}\right|$

Правильный ответ: В, Г, Б, А

Компетенции: ОПК-1

2. Расположите комплексные числа $z = x + iy$ в порядке возрастания главных значений их аргументов:

- А) -3
- Б) $2i^3$
- В) $1 + i$
- Г) $-1 - 1i$

Правильный ответ: В, А, Г, Б

Компетенции: ОПК-1

3. Расположите функции $w = f(z)$ в порядке убывания их коэффициентов растяжения в точке $z = i$:

- А) $z^2 + 2$
- Б) $3e^{\pi z}$
- В) $z + i1$

Г) $\ln(z + 1)$

Правильный ответ: Б, А, В, Г

Компетенции: ОПК-1

4. Расположите функции $w = f(z)$ в порядке возрастания числа их полюсов с учетом кратности:

А) $\frac{z+1}{(z-2)(3z+i)}$

Б) $\frac{\sin z^2}{z(iz-3)}$

В) $\frac{e^{-z}}{z(z^2+1)^2}$

Г) $\frac{z^2+zi}{(z+i)^4(1-z)}$

Правильный ответ: Б, А, Г, В

Компетенции: ОПК-1

Задания открытого типа

Задания открытого типа на дополнение

1. Напишите пропущенное слово (словосочетание).

_____ аналитической функции $f(z)$ в изолированной особой точке a называется коэффициент C_{-1} в разложении Лорана этой функции в окрестности точки a и обозначается $\text{res}f(a)$:

$$\text{res}f(a) = C_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_L f(z) dz$$

Правильный ответ: вычетом.

Компетенции: ОПК-1

2. Напишите пропущенное слово (словосочетание).

_____ – это значение вычета аналитической функции $f(z)$ в устранимой особой точке a

Правильный ответ: нуль.

Компетенции: ОПК-1

3. Напишите пропущенное слово (словосочетание).

Если функция $f(z)$ имеет в точке a _____ m -го порядка, то вычет в этой точке нужно вычислять по формуле:

$$C_{-1} = \text{res}f(a) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \{(z-a)^m f(z)\}$$

Правильный ответ: полюс.

Компетенции: ОПК-1

4. Напишите пропущенное слово (словосочетание).

Если a – существенно особая точка функции $f(z)$, то для определения вычета в этой точке необходимо разложить $f(z)$ в ряд _____ в окрестности этой точки и найти коэффициент C_{-1} .

Правильный ответ: Лорана.

Компетенции: ОПК-1

5. Напишите пропущенное слово (словосочетание).

_____ вычетом функции $f(z)$ относительно замкнутого контура Γ называется интеграл вида $\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N - P$, где N – число нулей функции $f(z)$ внутри контура Γ , а P – число полюсов той же функции, причем каждый нуль или полюс считается столько раз, какова его кратность.

Правильный ответ: логарифмическим.

Компетенции (индикаторы): ОК-7, ПК-2, ОПК-f(z).

Задания открытого типа с кратким свободным ответом

1. Найти вычет функции $f(z) = e^{\frac{i}{z}}$ в бесконечно удаленной точке $z = \infty$ (Ответ запишите в виде числа).

Правильный ответ: $\operatorname{res} f(\infty) = -i$

Компетенции: ОПК-1

2. Найти вычет функции $f(z) = \frac{\cos z}{z}$ в простом полюсе $z = 0$ (Ответ запишите в виде числа).

Правильный ответ: $\operatorname{res} f(0) = 1$.

Компетенции: ОПК-1

3. Найти вычет функции $f(z) = \frac{e^{2z}}{(z-i\pi)^2}$ в полюсе $z = i\pi$ (Ответ запишите в виде числа).

Правильный ответ: $\operatorname{res} f(i\pi) = -2$.

Компетенции: ОПК-1

4. Вычислить интеграл $\oint_C \frac{e^{z^2}}{z^2 - 12z} dz$, где $C: |z - 2| = 1$, используя аппарат теории вычетов. (Ответ запишите в виде комплексного числа)

Правильный ответ: 0.

Компетенции: ОПК-1

5. Вычислить интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^3}$, используя аппарат теории вычетов. (Ответ запишите в виде числа)

Правильный ответ: $\frac{3\pi}{8}$.

Компетенции: ОПК-1

Задания открытого типа с развернутым ответом

1. Решить задачу, используя формализм теории вычетов:
Вычислить интеграл

$$\oint_{|z-i|=1} \frac{e^z dz}{z^4 + 2z^2 + 1}$$

Указание. Если $f(z)$ – аналитическая в области D функция за исключением конечного числа точек $a_1, \dots, a_k$ и L – замкнутый контур, охватывающий эти точки, то

$\oint_L f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^K \operatorname{res} f(a_j)$	(*)
---	-----

Привести расширенное решение.

Время выполнения – 15 мин.

Ожидаемый результат:

1. Подынтегральная функция имеет две изолированных особенности в точках $z_1 = +i$ и $z_2 = -i$;

2. Подынтегральная функция имеет два полюса второго порядка в точках $z_1 = +i$ и $z_2 = -i$;

3. Только один из них $z_1 = +i$ лежит внутри контура интегрирования L ;

4. Вычет находим только в точке $z_1 = i$.

$$\operatorname{res} f(z_1) = \frac{1}{1!} \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} \left[\frac{e^z}{(z+i)^2} \right] = \lim_{z \rightarrow i} \left[\frac{e^2(z+i)^2 - 2e^z(z+i)}{(z+i)^4} \right] = \frac{e^i(1+i)}{-4}$$

тогда, на основании формулы (*), окончательно получаем

$$I = \oint_{|z-i|=1} e^z (z^4 + 2z^2 + 1)^{-1} dz = 2\pi i \left[-\frac{1}{4} e^i (1+i) \right] = \frac{\pi i}{2} e^i (1+i).$$

Критерии оценивания:

- нахождение изолированных особых точек;
- классификация изолированных особых точек;
- выделение особых точек, охватываемых контуром интегрирования L ;
- корректное использование формулы (*).

Компетенции: ОПК-1

2. Решить задачу, используя формализм теории вычетов или основной формулы Коши:

Вычислить интеграл

$$\int_0^{2\pi} (\cos x)^{2n} dx$$

Привести расширенное решение.

Время выполнения – 30 мин.

Ожидаемый результат:

1. Сделаем подстановку $e^{xi} = \zeta$, которая переводит отрезок действительной оси $0 \ll x \ll 2\pi$ в окружность C с центром в нулевой точке радиуса единица плоскости ζ . Таким образом, получаем соотношение

$$\int_0^{2\pi} (\cos x)^{2n} dx = \int_0^{2\pi} \left(\frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2} \right)^{2n} dx = -\frac{1}{2^{2n}} \int_C \frac{(1+\zeta^2)^{2n}}{\zeta^{2n+1}} d\zeta. \quad (*)$$

2. По основной формуле Коши находим

$$\int_C \frac{(1+\zeta^2)^{2n}}{\zeta^{2n+1}} d\zeta = \frac{2\pi i}{(2n)!} \left. \frac{d^{2n}(1+\zeta^2)^{2n}}{d\zeta^{2n}} \right|_{\zeta=0}.$$

Замечая, что $\frac{1}{(2n)!} \left. \frac{d^{2n}(1+\zeta^2)^{2n}}{d\zeta^{2n}} \right|_{\zeta=0}$ есть коэффициент при ζ^{2n} в разложении бинома $(1 + \zeta^2)^{2n}$, находим для него значение

$$\frac{2n(2n-1)\dots(n+1)}{1 \cdot 2 \dots n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}.$$

Внося его в формулу (*), окончательно получим

$$\int_0^{2\pi} (\cos x)^{2n} dx = 2\pi \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}.$$

Ответ: $\frac{(2n)!}{(n!)^2}$.

Критерии оценивания:

- использование оригинальных подстановок;
- использование основной формулы Коши;

Компетенции: ОПК-1

Экспертное заключение

Представленный комплект оценочных материалов по дисциплине «Прикладные аспекты теории вычетов» соответствует требованиям ФГОС ВО.

Предлагаемые оценочные материалы адекватны целям и задачам реализации основной профессиональной образовательной программы по направлению подготовки 01.04.02 Прикладная математика и информатика.

Виды оценочных средств, включенные в представленный фонд, отвечают основным принципам формирования ФОС.

Разработанные и представленные для экспертизы оценочные материалы рекомендуются к использованию в процессе подготовки обучающихся по указанному направлению.

Председатель учебно-методической комиссии
института компьютерных систем и
информационных технологий

Ветрова Н. Н.

Лист изменений и дополнений

№ п/п	Виды дополнений и изменений	Дата и номер протокола заседания кафедры (кафедр), на котором были рассмотрены и одобрены изменения и дополнения	Подпись (с расшифровкой) заведующего кафедрой (заведующих кафедрами)
1.	Дополнен комплектом оценочных материалов	протокол заседания кафедры прикладной математики № <u>8</u> от <u>24.02.2025</u>	 В.В. Малый