

**Комплект оценочных материалов по дисциплине
«Прямые методы в математической физике»**

Задания закрытого типа

Задания закрытого типа на выбор правильного ответа

1. Выберите один правильный ответ

Определить *порядок* ДУ в частных производных для функции $u(x, y)$:
 $(x + y)u_x^2 - 4y^3(u_{yxy} + e^x u_{xy}) + 2y^2(u_y - 3u_x + 2yu_{xyy}) + u - 1 = 0$

А) 3

Б) 1

В) 2

Правильный ответ: В

Компетенции: ПК-2

2. Выберите один правильный ответ

Определить знак $\operatorname{sgn} \delta$ параметра $\delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$ (дискриминанта) ДУ в частных производных для функции $u(x, y)$: $x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} = 0$

А) $\operatorname{sgn} \delta = 0$

Б) $\operatorname{sgn} \delta = +1$

В) $\operatorname{sgn} \delta = -1$

Правильный ответ: Б

Компетенции: ПК-2

3. Выберите один правильный ответ

Определить якобиан $I = \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)}$ перехода $\xi = xy$, $\eta = \frac{y}{x}$:

А) $-\frac{y}{x}$

Б) $\frac{x}{y}$

В) $\frac{y}{x}$

Правильный ответ: В

Компетенции: ПК-2

Задания закрытого типа на установление соответствия

1. Установите правильное соответствие. Каждому элементу левого столбца соответствует только один элемент правого столбца.

	Вид дифференциального уравнения		Уравнение характеристик
1)	$yu_{xx} - u_{yy} = 0, y > 0;$	А)	$y^2 dy^2 - 2xy dx dy + x^2 dx^2 = 0$
2)	$xu_{xx} + 2xu_{xy} - (1-x)u_{yy} = 0$	Б)	$y dy^2 - dx^2 = 0$
3)	$y^2 u_{xx} + 2xy u_{xy} + x^2 u_{yy} = 0$	В)	$x dy^2 - x dx dy - (1-x) dx^2 = 0$

Правильный ответ:

1	2	3
Б	В	А

Компетенции: ПК-2

2. Установите правильное соответствие. Каждому элементу левого столбца соответствует только один элемент правого столбца.

	Общий вид уравнения		Канонический вид
1)	$x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} = 0$	А)	$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + (\xi - \eta)^{-1} u_{\xi} + \left(\frac{1}{2\eta}\right) u_{\eta} = 0$
2)	$tg^2 x \cdot u_{xx} - 2y \cdot tg x \cdot u_{xy} + y^2 u_{yy} + tg^3 x \cdot u_x = 0$	Б)	$u_{\xi\eta} - \frac{1}{2\xi} u_{\eta} = 0$
3)	$y^2 u_{xx} + 2xy \cdot u_{xy} + x^2 u_{yy} + y \cdot u_y = 0$	В)	$u_{\eta\eta} - \frac{2\xi \cdot u_{\xi}}{\eta^2} = 0$

Правильный ответ:

1	2	3
Б	В	А

Компетенции: ПК-2

3. Установите правильное соответствие. Каждому элементу левого столбца соответствует только один элемент правого столбца.

	ДУ в канонической форме		Название
1)	$u_{tt} = a^2 u_{xx}, u = u(x, t)$	А)	уравнение теплопроводности
2)	$u_t = a^2 u_{xx}, u = u(x, t)$	Б)	стационарное уравнение теплопроводности
3)	$u = u(x, t), u = u(x, y)$	В)	уравнение колебаний

Правильный ответ:

1	2	3
В	А	Б

Компетенции: ПК-2

4. Установите правильное соответствие. Каждому элементу левого столбца соответствует только один элемент правого столбца.

	Постановка задачи: найти решение ДУ		Ответ
1)	$x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} = 0$	А)	$u(x, y) = \phi(xy) \ln y + \psi(xy)$, где $\phi(x), \psi(x)$ – произвольные функции
2)	$x^2 u_{xx} - 2xy \cdot u_{xy} + y^2 u_{yy} + x \cdot u_x + y \cdot u_y = 0$	Б)	$u = (1 + 2x - e^{2x})e^y + \varphi(x) + \frac{1}{2} \int_y^{2x+y} \psi(z) dz$
3)	$u_{xx} - 2u_{xy} + 4e^y = 0$ $u(0, y) = \varphi(y)$, $u_x(0, y) = \psi(y)$	В)	$u(x, y) = \sqrt{xy} \cdot \Phi\left(\frac{y}{x}\right) + \psi(xy)$, $\Phi(\eta) = \int \phi(\eta) d\eta$, где $\phi(x)$, $\psi(x)$ – произвольные функция

Правильный ответ:

1	2	3
В	А	Б

Компетенции: ПК-2

Задания закрытого типа на установление правильной последовательности

1. Расположите ДУ в направлении возрастания их порядка:

А) $x^3 y(u_{xy}^2 - 2u_y) + 3e^x u_x - x^2(xy u_{xy}^2 - 2u) + 3 = 0$

Б) $xy(u_{xxy} + 2u_{xy}) - 2xy(u_{xy}^2 - u_{xy}) + uu_{x=0}$

В) $u_{xyxy} + 2u_{xx} - u + 2 = 0$

Г) $\sin xy u_{xx} - xy(u_x + u) + y(u_{xy} + x \cos x) = 0$

Правильный ответ: А, Г, Б, В

Компетенции: ПК-2

2. Расположите ДУ в порядке возрастания параметра $\text{sgn} \delta$, $\delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$:

А) $x^2 u_{xx} + y^2 u_{yy} = 0$

Б) $e^{2y} u_{xx} - u_{yy} = 0$

В) $x^2 u_{xx} + 81y^2 u_{yy} - 18xy u_{xy} - 10xu_x = 0$

Правильный ответ: А, В, Б

Компетенции: ПК-2

3. Расположите ДУ в порядке возрастания суммарного числа начальных и граничных условий:

А) $u_{tt} = a^2 u_{xx}$, $x \in [0, l]$, $t > 0$

Б) $u_{tt} = a^2 u_{xx}, -\infty < x < +\infty, t > 0$

В) $u_t = a^2 u_{xx}, x \in [0, l], t > 0$

Правильный ответ: Б, В, А

Компетенции: ПК-2

4. Расположите ДУ в порядке возрастания возможных значений параметра $sgn\delta$, $\delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$:

А) $xu_{xx} - 2yu_{xy} + u_{yy} = 0$

Б) $y^2 u_{xx} - x^2 u_{yy} = 0, x, y \neq 0$

В) $xu_{xx} + u_{yy} = 0, x, y \neq 0$

Правильный ответ: Б, В, А

Компетенции: ПК-2

Задания открытого типа

Задания открытого типа на дополнение

1. Напишите пропущенное слово (словосочетание).

_____ называют такие методы (Эйлера, Рунге, Галеркина, конечных разностей, конечных элементов) решения задач теории дифференциальных и интегральных уравнений, которые сводят эти задачи к конечным системам алгебраических уравнений.

Правильный ответ: прямыми.

Компетенции: ПК-2

2. Напишите пропущенное слово (словосочетание).

Простейшую задачу вариационного исчисления называют задачей с _____ и символически записывают в виде

$$J[y(x)] = \int_a^b F(x, y(x), y'(x)) dx \rightarrow \text{extr}; y(a) = y_a, y(b) = y_b.$$

Правильный ответ: закрепленными концами.

Компетенции: ПК-2

3. Напишите пропущенное слово (словосочетание).

_____ – функции (кривые) $y(x) \in M$, где $M = \{y(x) \in C^1(a, b): y(a) = y_a, y(b) = y_b\}$ – множество, на котором идет поиск локального экстремума.

Правильный ответ: допустимые.

Компетенции: ПК-2

4. Напишите пропущенное слово (словосочетание).

_____ принято называть допустимую функцию $y(x)$, которая удовлетворяет уравнению Эйлера $\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'}$

Правильный ответ: экстремалью.

Компетенции: ПК-2

5. Напишите пропущенное слово (словосочетание).

_____, заданном на некотором множестве M называют отображение $J: M \rightarrow R$ множества M в множество R действительных чисел.

Правильный ответ: функционалом.

Компетенции: ПК-2

Задания открытого типа с кратким свободным ответом

1. Пусть $\{\varphi_n\}_1^\infty$ – ортонормальная система элементов в бесконечномерном евклидовом пространстве E . Тогда расстояние $\rho(\varphi_k, \varphi_m), k \neq m$ равно _____ (Ответ запишите в виде числа)

Правильный ответ: $\sqrt{2}$.

Компетенции: ПК-2

2. Коэффициенты $\alpha_n, n = 1, 2, \dots$ ряда Фурье по ортонормальной системе элементов $\{\varphi_n\}_1^\infty$ для произвольного элемента $f \in E$ равны _____ (Ответ запишите в виде формулы)

Правильный ответ: $\alpha_n = (f, \varphi_n)$.

Компетенции: ПК-2

3. Пусть H – гильбертово пространство и $\{\varphi_n\}_1^\infty$ – полная ортонормальная система элементов в H . Если $f \in H$ – такой элемент, что $(f, \varphi_n) = 0, n = 1, 2, \dots$, то f равен _____ (Ответ запишите в виде числа)

Правильный ответ: 0.

Компетенции: ПК-2

4. Если $\{\varphi_n\}_1^\infty$ – ортонормальная система элементов в бесконечномерном евклидовом пространстве E и n – произвольное фиксированное натуральное число. Тогда, если линейная комбинация $c_1\varphi_1 + \dots + c_n\varphi_n = 0$, то все коэффициенты c_i равны _____ (Ответ запишите в виде числа)

Правильный ответ: 0.

Компетенции: ПК-2

5. Найти скалярное произведение векторов $x = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right)$ и $y = (0, 1, 1, 0, \dots), x, y \in l_2$ (Ответ запишите в виде числа)

Правильный ответ: $\frac{5}{6}$.

Компетенции: ПК-2

Задания открытого типа с развернутым ответом

1. Решить задачу, используя формализм прямых методов в математической физике:

Найти экстремаль функционала

$$J(y) = \int_1^3 [12xy + (y')^2] dx,$$

$$y(1) = 0; y(3) = 26.$$

Привести расширенное решение.

Время выполнения – 30 мин.

Критерии оценивания:

- построение уравнения Эйлера;
- построение функции Вейерштрасса;
- определение решения основной задачи;

Ожидаемый результат:

1. Запишем уравнение Эйлера

$$12x - 2y'' = 0 \text{ или } y'' = 6x.$$

Найдем общее решение уравнения Эйлера, интегрируя последовательно обе части уравнения. В результате получим следующее решение

$$y(x) = x^3 + c_1x + c_2.$$

Граничным условиям

$$y(1) = 1 + c_1 + c_2,$$

$$y(3) = 27 + 3c_1 + c_2 = 26$$

удовлетворяет экстремаль $y(x) = x^3 - 1$.

2. На промежутке $[1,3]$ данная экстремаль $y(x) = x^3 - 1$ может быть включена в центральное поле экстремалей $y(x, c_1) = x^3 - 1 + c_1(x - 1)$.

Функция Вейерштрасса

$E(x, y, p, y') = 12xy + (y')^2 - 12xy - p^2 - (y' - p)2p = (y' - p)^2 \geq 0$
знакоопределена при любых y' , т.е. сохраняет знак в сильной окрестности кривой $y(x) = x^3 - 1$.

3. Следовательно, выполнено достаточное условие Вейерштрасса, и экстремаль $y(x) = x^3 - 1$ доставляет сильный минимум.

Ответ: $y(x) = x^3 - 1$.

Компетенции: ПК-2

2. Решить задачу, используя формализм прямых методов в математической физике (решение провести в компьютерном классе):

Определить нестационарные температурные поля в неограниченной пластине (алюминиевом сплаве AM_{26}) с теплофизическими свойствами:

$$\rho = 2,2 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, \lambda = 1,33 \frac{\text{ккал}}{\text{м} \cdot \text{час} \cdot \text{град}}, C = 0,2 \frac{\text{ккал}}{\text{кг} \cdot \text{град}},$$

если на той же поверхности, при $x = L$, задано изменение температуры

$$T(x, t) = \beta \cdot t, \beta = 20 \frac{\text{град}}{\text{сек}},$$

а другая поверхность термически изолирована. Толщина плиты: $L = 10$ см. Начальное распределение по всей пластине равно 0°C .

Привести расширенное решение.

Время выполнения – 30 мин.

Критерии оценивания:

- построение разностной схемы;
- использование специальной программы;
- анализ численных результатов.

Ожидаемый результат:

1. Для начала мы сформулируем проблему в дифференциальной форме. Поскольку распространение тепла на самом деле происходит по одной оси координат, то уравнение переноса будет одномерным:

$$\frac{\partial T(x, \tau)}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 T(x, \tau)}{\partial x^2},$$

при этом a – коэффициент теплопроводности определяется теплофизическими свойствами тела $a = \frac{k}{c\rho}$.

Начальные условия:

$$T(x, 0) = 0.$$

Граничные условия:

$$\begin{aligned} T(L, t) &= 20t, \\ T(0, t) &= 0. \end{aligned} \quad (*)$$

Формула (*) описывает теплоизоляционную поверхность, где нулевой слой выходят за пределы пластины и температура на этом слое всегда равна 0°C .

Решение этой задачи аналитическими методами нецелесообразно, поскольку мы ставим перед собой цель найти простое практическое решение, которое применимо в инженерных расчетах и предпочтительно запрограммировано на COMPUTER. Например, решая проблему методом разделения переменных, мы получаем довольно громоздкое решение:

$$\begin{aligned} T(x, \tau) &= \frac{2}{L} \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{a(2n+1)\pi^2 t}{4L}\right) \cos \frac{(2n+1)\pi x}{2L} \times \\ &\times \left(\frac{(2n+1)\pi a(-1)^n}{2L} \cdot \int_0^L 20t \exp \frac{a(2n+1)\pi^2 t}{4L} dx \right). \end{aligned}$$

Решение в интегральной форме (преобразование Лапласа) имеет не менее громоздкий вид, но значительный недостаток, потому что довольно трудно создать программу нахождения оригинала по изображению.

В данном случае удобно использовать численные методы решения, в частности, метод конечных разностей.

2. Составляем задачу в виде конечной разницы (в соответствии с классической явной схемой). Тогда вновь получим дифференциально-разностное уравнение теплопроводности с граничными условиями:

$$\frac{\vartheta_{i,k+1} - \vartheta_{i,k}}{l} = a \frac{\vartheta_{i+1,k} - 2\vartheta_{i,k} + \vartheta_{i-1,k}}{h^2}.$$

$$\vartheta_{i,0} = 0;$$

$$\vartheta_{L,k} = 20k,$$

$$\vartheta_{0,k} = 0.$$

при $\lambda \leq 1/2$, где $\lambda = \frac{al}{h^2}$.

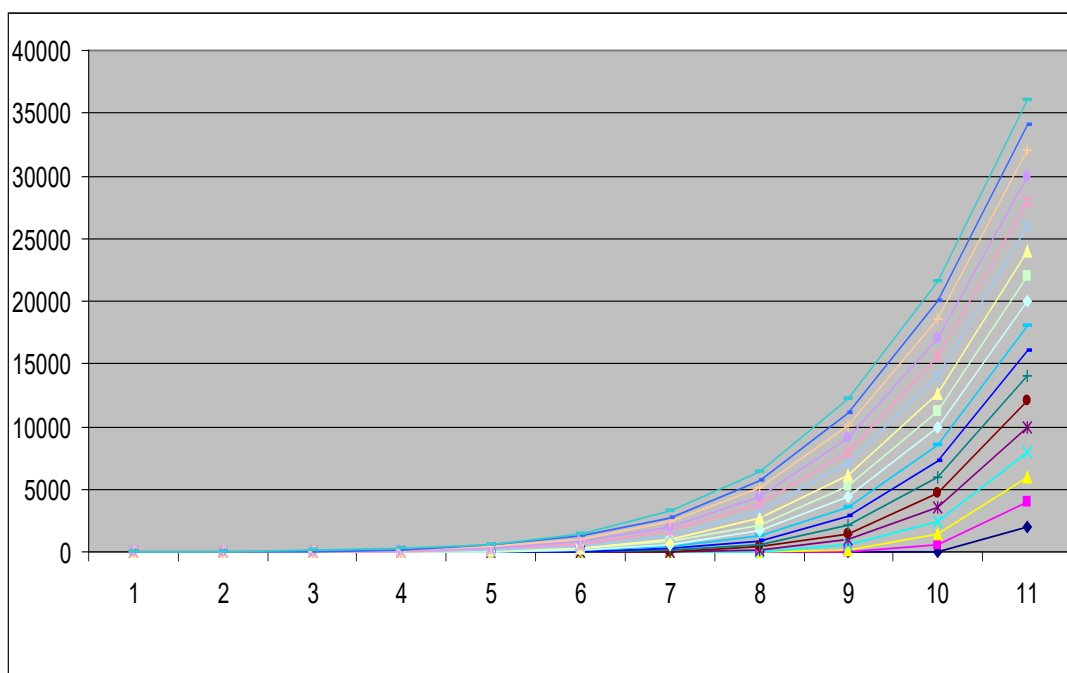
Этот метод обычно требует определенного объема однотипных вычислительных операций, поэтому была разработана программа на языке Паскаль.

Кратко можно описать приложение пользователя. После процедуры ввода данных, непосредственно рассчитывается температура поля пластины и выдаются табличные данные на экран. Составлена программа численного расчета температурного поля пластины. Таблица показывает значения температуры для любого сечения пластины. На графике отчетливо показано, как меняется температура вдоль пластины в зависимости от времени нагрева поверхности.

Ответ.

**Таблица и диаграмма температурного поля пластины при соблюдении
условия устойчивости**

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	000
0	0	0	0	0	0	0	0	00	000
0	0	0	0	0	0	0	080	440	000
0	0	0	0	0	0	4	04	430	000
0	0	0	0	0	6,2	72,8	46,8	523,2	0000
0	0	0	0	,86	8,32	58,02	487,52	693,32	2000
0	0	0	,458	9,44	32,192	06,96	110,41	923,584	4000
0	0	,4374	,4152	7,871	40,7968	15,565	803,33	202,557	6000
0	,13122	,09952	7,0586	3,312	85,3494	279,46	556,77	522,021	8000
,039366	,682344	,996754	5,4469	58,0472	65,9723	694,42	363,15	875,838	0000
,22045	,083774	3,23747	3,39194	43,6446	82,1291	156,51	216,34	1259,28	2000
,713312	,870886	4,9377	02,4214	51,1142	032,897	662,14	111,27	2668,61	4000
,746591	,64366	2,16277	53,7841	81,0411	317,136	208,11	043,74	4100,83	6000
,591734	7,03027	5,89344	18,4748	33,6924	633,599	791,5	010,17	5553,45	8000
,545775	7,65766	7,0089	97,2657	09,099	980,999	409,73	007,56	7024,43	0000
0,91561	2,12947	36,2806	90,7386	007,119	358,049	060,46	0033,3	8512,04	2000
7,00508	1,01064	84,3727	99,3153	227,484	763,493	741,58	1085,1	0014,8	4000
5,10522	4,81758	41,8468	23,2831	469,836	196,117	451,2	2160,9	1531,44	6000



Компетенции: ПК-2

Экспертное заключение

Представленный комплект оценочных материалов по дисциплине «Прямые методы в математической физике» соответствует требованиям ФГОС ВО.

Предлагаемые оценочные материалы адекватны целям и задачам реализации основной профессиональной образовательной программы по направлению подготовки 01.04.02 Прикладная математика и информатика.

Виды оценочных средств, включенные в представленный фонд, отвечают основным принципам формирования ФОС.

Разработанные и представленные для экспертизы оценочные материалы рекомендуются к использованию в процессе подготовки обучающихся по указанному направлению.

Председатель учебно-методической комиссии
института компьютерных систем и
информационных технологий

Ветрова Н. Н.

Лист изменений и дополнений

№ п/п	Виды дополнений и изменений	Дата и номер протокола заседания кафедры (кафедр), на котором были рассмотрены и одобрены изменения и дополнения	Подпись (с расшифровкой) заведующего кафедрой (заведующих кафедрами)
1.	Дополнен комплектом оценочных материалов	протокол заседания кафедры прикладной математики № <u>8</u> от <u>24.02.2025</u>	 В.В. Малый