

**Комплект оценочных материалов по дисциплине  
«Математическое моделирование сложных систем»**

**Задания закрытого типа**

**Задания закрытого типа на выбор правильного ответа**

1. Выберите один правильный ответ

Математическое моделирование используется для:

- А) упрощения поставленной задачи
- Б) поиска физической модели
- В) принятия решения в рамках поставленной задач
- Г) изучения свойств реальных объектов в рамках поставленной

задачи

Правильный ответ: Г

Компетенции: ПК-1, ПК-3

2. Выберите один правильный ответ

Модель отражает:

- А) существенные признаки моделируемого объекта в соответствии с целью моделирования
- Б) существенные признаки объекта
- В) некоторые из существующих признаков объекта
- Г) все существующие признаки объекта

Правильный ответ: А

Компетенции: ПК-1, ПК-3

3. Выберите один правильный ответ

Построение математической модели начинается с

- А) построения алгоритма, моделирующего поведение объекта
- Б) анализа взаимосвязей моделируемого объекта
- В) построения и анализа простейшей математической модели, рассматриваемого объекта
- Г) поиска закономерностей поведения объекта

Правильный ответ: В

Компетенции: ПК-1, ПК-3

4. Выберите один правильный ответ

Какие процессы должны отражать математические модели в задачах исследования поведения реальных объектов или процессов

- А) реальные физические нелинейные процессы, протекающие в реальных объектах
- Б) реальные математические нелинейные процессы
- В) реальные физические линейные процессы.

Г) реальные математические линейные процессы

Правильный ответ: А

Компетенции: ПК-1, ПК-3

5. Выберите один правильный ответ

Какими знаниями необходимо обладать для построения математической модели в прикладных задачах?

А) только специальными знаниями об объекте

Б) только математическими знаниями

В) специальными знаниями об моделируемом объекте и математическими знаниями

Г) только физическими знаниями

Правильный ответ: В

Компетенции: ПК-1, ПК-3

### Задания закрытого типа на установление соответствия

1. Установите правильное соответствие. Каждому элементу левого столбца соответствует только один элемент правого столбца.

#### Основные этапы математического моделирования

	Этапы		Содержание этапа
1)	Построение модели	А)	на этом этапе задается некоторый определенный объект — явление природы, конструкция, экономический план, производственный процесс и т. д. Сначала выявляются основные особенности явления и связи между ними на качественном уровне. Затем найденные качественные зависимости формулируются на языке математики
2)	Решение математической задачи, к которой приводит модель	Б)	на этом этапе большое внимание уделяется разработке алгоритмов и численных методов решения задачи на ЭВМ, при помощи которых результат может быть найден с необходимой точностью и за допустимое время.
4)	Модификация модели	Г)	на этом этапе происходит либо усложнение модели, чтобы она была более адекватной действительности, либо ее упрощение ради достижения практически приемлемого решения
3)	Проверка адекватности модели	В)	на этом этапе выясняется, согласуются ли результаты эксперимента с теоретическими

			следствиями из модели в пределах определенной точности
--	--	--	--

Правильный ответ:

1	2	3	4
А	Б	Г	В

Компетенции: ПК-1, ПК-3

2. Установите правильное соответствие. Каждому элементу левого столбца соответствует только один элемент правого столбца.

Каждому методу поставить в соответствие его базовый принцип

	Метод		Базовый принцип
1)	Вариационные методы	А)	Минимизация суммы квадратов отклонений
2)	Метод Монте-Карло	Б)	Замена производных разностными аналогами
3)	Метод конечных разностей	В)	Использование случайных чисел для решения задач
4)	Метод наименьших квадратов	Г)	Минимизация функционала энергии

Правильный ответ:

1	2	3	4
Г	В	Б	А

3. Установите правильное соответствие. Каждому элементу левого столбца соответствует только один элемент правого столбца.

Принципы построения математических моделей

	Наименование принципа		Содержание принципа
1)	Принцип информационной достаточности	А)	При полном отсутствии информации об исследуемой системе построение ее модели невозможно. При наличии полной информации о системе ее моделирование лишено смысла. Определяет некоторый критический уровень априорных сведений о системе при достижении которого может быть построена ее адекватная модель.
2)	Принцип осуществимости	Б)	Состоит в том, что создаваемая модель должна обеспечивать достижение поставленной цели исследования с вероятностью, существенно отличающейся от нуля, и за конечное время.

3)	Принцип агрегирования	В)	Является ключевым. Создаваемая модель должна отражать в первую очередь те свойства реальной системы (или явления), которые влияют на выбранный показатель эффективности. Соответственно при использовании любой конкретной модели познаются лишь некоторые стороны реальности.
4)	Принцип множественности моделей	Г)	Заключается в том, что ложную систему можно представить состоящей из агрегатов (подсистем), для адекватного математического описания которых оказываются пригодными некоторые стандартные математические схемы.

Правильный ответ:

1	2	3	4
А	Б	Г	В

Компетенции: ПК-1, ПК-3

4. Установите правильное соответствие. Каждому элементу левого столбца соответствует только один элемент правого столбца.

Формы представления математических моделей

	Форма представления		Содержание
1)	Аналитическая форма	А)	Запись модели выполняется в виде явных, неявных, параметрических функций, интегральных и дифференциальных уравнений или других аналитических выражений, связывающих управляемые и неуправляемые переменные и цель моделирования.
2)	Алгоритмическая форма	Б)	Модель представляется в формализованном виде, т.е. в виде точного предписания последовательности некоторой системы операций над исходными данными с целью получения результата.
3)	Графическая форма	В)	Это представление моделируемого объекта на некотором графическом языке, например, на языке эквивалентных схем, диаграмм, языке графов и т. д.
4)	Цифровая форма	Г)	Упорядоченный набор {множество $Y$ } чисел из некоторого допустимого множества

			значений и алгоритм (правило), который множеству $\{Y\}$ ставит в соответствие некоторую такую функцию $F$ , что эта функция представляет исходный объект в соответствии с критериями качества моделирования. Эта форма характеризуется свойствами набора $\{Y\}$ и сложностью алгоритма.
--	--	--	---

Правильный ответ:

1	2	3	4
A	B	B	Г

Компетенции: ПК-1, ПК-3

5. Установите правильное соответствие. Каждому элементу левого столбца соответствует только один элемент правого столбца.

Приемы упрощения математических моделей

	Наименование приёма		Содержание
1)	Упрощение уравнений	A)	Включает виды упрощений, основанные на особенностях движений моделируемых объектов, которые позволяют уменьшить количество искомых переменных математической модели
2)	Упрощение движений	B)	Основными способами являются: – переход к безразмерным величинам (с помощью замены переменных) – приближенная замена переменных величин постоянными значениями; – пренебрежение малыми членами.
3)	Линеаризация	B)	Математические модели имеют наиболее простой вид математического описания, а также наиболее простые способы вычисления, в том случае, когда они линейные. Могут быть представлены как алгебраическими уравнениями, так и дифференциальными, методы решения которых хорошо разработаны
4)	Метод малого параметра	Г)	Применяется при аналитическом виде математического описания и основывается на разложении в ряд Тейлора искомого решения. Начинается применение метода с анализа вида аналитической зависимости и выявления малых членов. Цель такого

			анализа заключается в получении уравнения, простого для решения, которое не содержит этих малых членов.
--	--	--	---

Правильный ответ:

1	2	3	4
Б	А	В	Г

Компетенции: ПК-1, ПК-3

### **Задания закрытого типа на установление правильной последовательности**

1. Укажите правильную последовательность реализации процедур формирования математической модели:

- А) Формализованное описание процесса или объекта
- Б) Разработка математического описания
- В) Выбор метода решения, разработка алгоритма расчета
- Г) Проведение численных исследований

Правильный ответ: А, Б, В, Г

Компетенции: ПК-1, ПК-3

2. Укажите правильную последовательность реализации следующих основных действий при математическом моделировании процессов или объектов.

А) Формулирование законов, связывающих основные объекты модели, результат - запись в математических терминах сформулированных качественных представлений о связях между объектами модели

Б) Исследование математических задач, к которым приводят математические модели для решения основной задачи – получение в результате анализа модели выходных данных (теоретических следствий) для сопоставления их с результатами наблюдений изучаемых явлений

В) Выяснение соответствия принимаемой (гипотетической) модели критерию практики, т.е. выяснение вопроса о том, согласуется ли результат наблюдений с теоретическими следствиями модели в пределах точности наблюдений.

Г) Последующий анализ модели в связи с накоплением данных об изучаемых явлениях и модернизация модели

Правильный ответ: Г, А, Б, В

Компетенции: ПК-1, ПК-3

## Задания открытого типа

### Задания открытого типа на дополнение

1. Напишите пропущенное слово (словосочетание).

\_\_\_\_\_ – это линейное гиперболическое дифференциальное уравнение в частных производных, описывающее распространение малых поперечных колебаний струны.

Правильный ответ: Волновое уравнение

Компетенции: ПК-1, ПК-3

2. Напишите пропущенное слово (словосочетание).

\_\_\_\_\_ – это совокупность математических объектов (чисел, символов, множеств и т. д.) и связей между ними, отражающих важнейшие для проектировщика свойства проектируемого технического объекта.

Правильный ответ: Математическая модель

Компетенции: ПК-1, ПК-3

3. Напишите пропущенное слово (словосочетание).

\_\_\_\_\_ это — логико-математическое описание объекта, которое может быть использовано для экспериментирования на компьютере в целях проектирования, анализа и оценки функционирования объекта.

Правильный ответ: Имитационная модель

Компетенции: ПК-1, ПК-3

4. Напишите пропущенное слово (словосочетание).

\_\_\_\_\_ это — численный метод решения математических задач, при котором искомые величины представляют вероятностными характеристиками какого-либо случайного явления, это явление моделируется, после чего нужны характеристики.

Правильный ответ: Статистическое моделирование

5. Напишите пропущенное слово (словосочетание).

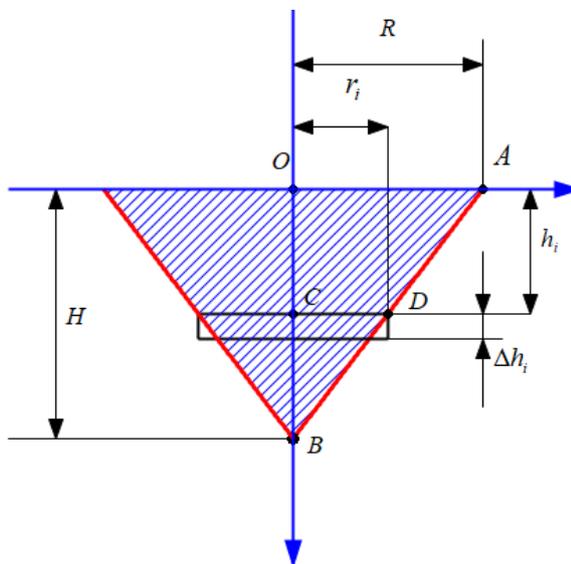
\_\_\_\_\_ это — дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка, которое моделирует распределение температуры в заданной области пространства и её изменение во времени.

Правильный ответ: Уравнение теплопроводности

Компетенции: ПК-1, ПК-3

### Задания открытого типа с кратким свободным ответом

1. Сформировать математическую модель процесса выкачки жидкости из резервуара и найти работу  $A$ , которую нужно затратить, чтобы выкачать жидкость, имеющую плотность  $\rho$ , из конического сосуда, обращенного вершиной вниз и имеющего радиус основания  $R$  и высоту  $H$ .



Правильный ответ: чтобы выкачать жидкость из заданного конического сосуда нужно затратить  $A = \frac{\pi \rho g R^2 H^2}{12}$  (ед. раб.) /  $\frac{\pi \rho g R^2 H^2}{12}$

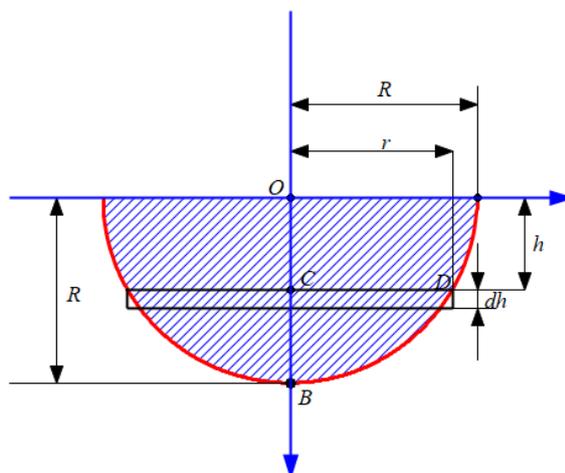
Компетенции: ПК-1, ПК-3

2. Сформировать математическую модель давления жидкости на вертикальную пластину и, воспользовавшись законом Паскаля давления жидкости на пластину о том, что это давление равно весу столба этой жидкости, имеющего основанием пластинку, а высотой – глубину ее погружения от свободной поверхности жидкости, т. е.  $P = \rho g h S$  где:  $\rho$  - плотность жидкости;  $g$  - ускорение свободного падения;  $S$  - площадь пластинки;  $h$  - глубина ее погружения, найти, с какой силой вода давит на вертикальный прямоугольный шлюз с основанием  $D = 18$  м и высотой  $H = 6$  м, если удельный вес воды равен  $\gamma = \rho g = 9810 \frac{H}{\text{м}^3}$ ?

Правильный ответ: Вода давит на вертикальный прямоугольный шлюз с силой 3178440 (ньютонов) / 3178440 Н.

Компетенции: ПК-1, ПК-3

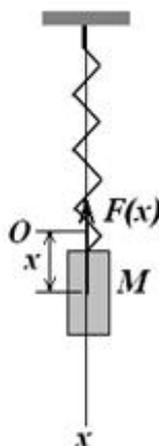
3. Сформировать математическую модель процесса выкачки жидкости из резервуара и найти работу  $A$ , которую нужно затратить, чтобы выкачать жидкость из полусферического сосуда радиуса  $R$  ?



Правильный ответ: чтобы выкачать жидкость из полусферического сосуда радиуса  $R$ , нужно затратить  $A = \frac{\rho g \pi R^4}{4}$  (ед. работы) /  $\frac{\rho g \pi R^4}{4}$ .

Компетенции: ПК-1, ПК-3

4. Сформировать математическую модель процесса растяжения пружины и найти работу, которую нужно затратить, чтобы растянуть пружину на  $s = 0.05$  м, если сила  $F(x) = 100x$  растягивает пружину на  $0,01$  м?



Правильный ответ: для растяжения пружины на  $0,05$  м нужно затратить  $12,5$  Дж. /  $12,5$  Дж.

Компетенции: ПК-1, ПК-3

### Задания открытого типа с развернутым ответом

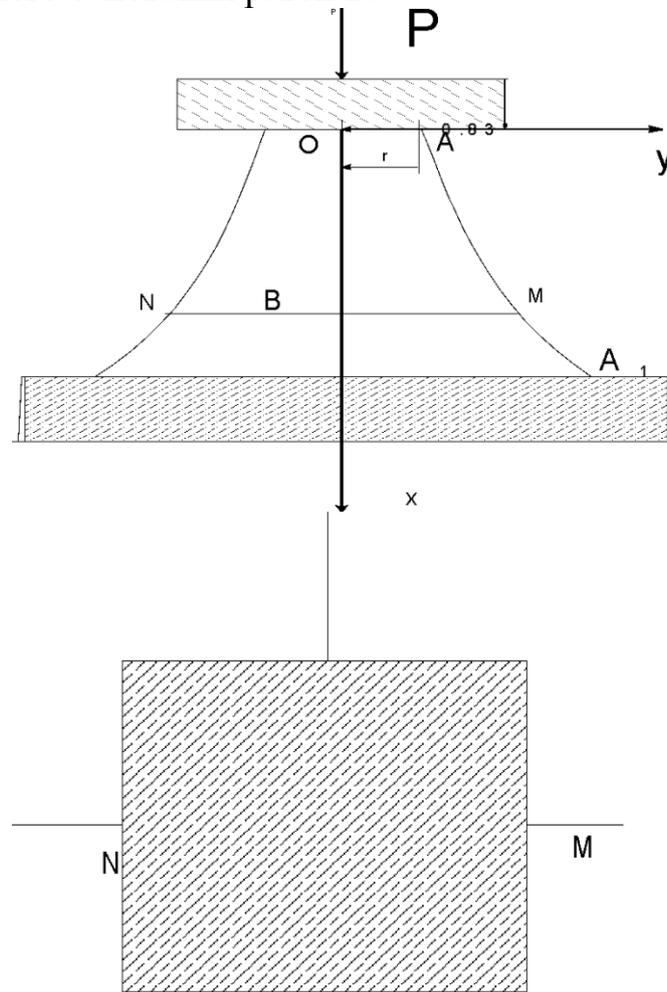
1. Построить математическую модель распределения напряжения в колонне с переменным профилем сечения и на её основе решить задачу определения формы, которую должна иметь однородная вертикальная подкрановая колонна с квадратным поперечным сечением, чтобы давление от удерживаемого ею груза  $P$  и её собственного веса, приходящееся на единицу площади горизонтального сечения, было всюду одинаково?

Привести расширенное решение.

Время выполнения – 0 мин.

Ожидаемый результат.

Удельный вес материала колонны равен  $\delta$ , а сторона квадрата её верхнего основания равен  $2r$ .



Сечение  $NM$ : квадрат со стороной  $NM=2y$

Пусть сечение колонны вертикальной плоскостью, проходящей через её ось симметрии, имеет вид, изображенный на рисунке. Определим давление груза  $P$  и собственного веса верхней отсеченной части колонны на единицу площади полученного горизонтального сечения  $NM$  (квадрат со стороной  $2y$ ).

Объём верхней отсеченной части колонны как объём тела с известным поперечным сечением (квадрат), равен

$$V = 4 \cdot \int_0^x y^2 dx,$$

а её вес

$$Q = \delta V = 4\delta \int_0^x y^2 dx.$$

Взяв отношение  $P + Q$  к площади  $S = 4y^2$  сечения  $MN$ , получим давление на единицу площади этого сечения, которое по условию задачи должно быть равно давлению на единицу площади любого другого горизонтального сечения.

Давление на единицу площади верхнего основания колонны равно  $\frac{P}{4r^2}$ ,  $r = OA$ , что следует из условия задачи. Поэтому

$$\frac{P + Q}{S} = \frac{P}{4r^2} \Rightarrow P + Q = \frac{PS}{4r^2} \Rightarrow P + 4\delta \int_0^x y^2 dx = \frac{P}{r^2} y^2$$

Дифференцируя обе части этого равенства, получим дифференциальное уравнение кривой  $AA_1$ :  $2\delta y^2 dx = \frac{P}{r^2} \cdot y dy$ .

Решая его как уравнение с разделяющимися переменными, найдём

$$dx = \frac{P}{2\delta r^2} \cdot \frac{dy}{y}; \Rightarrow x + c = \frac{P}{2\delta r^2} \ln y$$

Из условия  $y = r$  при  $x = 0$  находим, что постоянная  $c = \frac{P \ln r}{2\delta r^2}$ . Следовательно, уравнение кривой  $AA_1$  есть  $x = \frac{P}{2\delta r^2} \ln \frac{y}{r}$ . Разрешая относительно  $y$ , будем иметь:  $y = r \cdot e^{kx}$ , где  $k = \frac{2\delta r^2}{P}$ .

При найденной форме колонны во всех её точках давление будет одинаково.

Критерии оценивания:

– анализ физических составляющих процесса распределения напряжения в произвольном сечении колонны и формирование условий постоянства давления в поперечном сечении колонны;

– вычисление формы колонны, у которой во всех её точках давление будет одинаково.

Компетенции: ПК-1, ПК-3

2. Построить математическую модель малых поперечных колебаний струны при следующих условиях.

1) Рассмотреть только такие колебания струны, в которых:

а) векторы смещения точек струны лежат в одной плоскости  $(x, u)$ ;

б) вектор смещения перпендикулярен в любой момент времени к оси  $Ox$  (поперечные колебания), т.е.  $\vec{u}(x, t) = u(x, t)$ ;

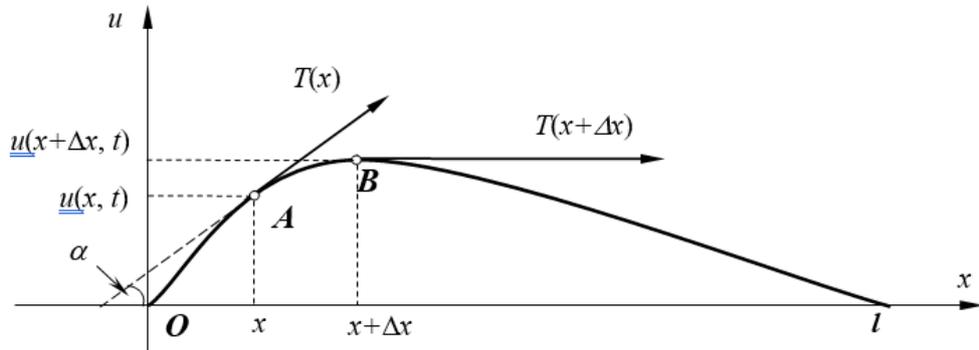
в) ограничимся рассмотрением лишь малых колебаний струны, т.е. таких, в которых можно пренебречь квадратом величины  $u'_x(x, t)$  (скорость изменения формы) в сравнении с единицей.

2) В рамках этой модели величину натяжения  $T$ , возникающего в струне, можно считать не зависящей от времени  $t$  и удлинением участков струны в процессе колебаний можно пренебречь. Следовательно, в силу закона Гука величина  $T$  не зависит от времени, т.е.  $T(x, t) = T(x)$ .

Справочная информация: предполагается, что на рассматриваемом участке  $(x_1, x_2)$  невозмущенной струны его длина  $l_0$  в начальный момент

времени равна  $x_2 - x_1$ , а в некоторый момент времени  $t - l$ . Тогда для малых колебаний

$$l = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (u'_x)^2} dx \approx \int_{x_1}^{x_2} 1 \cdot dx = x_2 - x_1$$



Привести расширенное решение.

Время выполнения – 30 мин.

Ожидаемый результат.

Составим уравнение движения малого участка струны  $AB$  длиной  $\Delta x$ .

Его движение описывается вторым законом Ньютона:  $m \cdot \vec{a} = \vec{F}$ , в котором  $m$  – масса участка  $AB$  ( $m = \rho(x) \cdot \Delta x$ ,  $\rho(x)$  – линейная плотность струны),  $\vec{a} = \vec{u}''(x, t)$  – ускорение точек участка. Сила  $\vec{F}$  представляет собой равнодействующую внутренних и внешних сил, приложенных к рассматриваемому участку. Под внутренней силой понимается сила, действующая на элемент струны со стороны смежных с ним участков в точках  $A$  и  $B$ . Величина этой силы равна  $\vec{T}(x + \Delta x) - \vec{T}(x)$ . Внешние силы, представляют собой воздействие на струну различных физических полей или тел. Результирующая этих сил может быть представлена в виде  $\vec{f}(x, t)\Delta x$  ( $\vec{f}(x, t)$  – линейная плотность внешних сил). Таким образом, смещение  $\vec{u}(x)$  элемента  $AB$  удовлетворяет уравнению

$$\vec{T}(x + \Delta x) - \vec{T}(x) + \vec{f}(x, t)\Delta x = \rho(x)\Delta x \frac{\partial^2 \vec{u}(x, t)}{\partial t^2}$$

Проекция этого векторного равенства на ось  $u$ , с учетом соотношений  $T_u = T(x) \sin \alpha = T(x) \frac{\text{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \text{tg}^2 \alpha}} = T(x) \frac{u'_x}{\sqrt{1 + (u'_x)^2}} \approx T(x)u'_x$  и

$$g(x, t) = \vec{f}_u(x, t),$$

приводит к уравнению

$$T(x + \Delta x) \frac{\partial^2 u(x + \Delta x, t)}{\partial x} - T(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x} + g(x, t)\Delta x = \rho(x)\Delta x \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}$$

Деление последнего равенства на  $\Delta x$  с последующим переходом к пределу при  $\Delta x \rightarrow 0$  позволяет получить уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x} (T(x)u'_x(x, t)) + g(x, t) = \rho(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}$$

В силу произвольности выбора точки  $x$  полученное уравнение будет справедливо для всех точек струны. Таким образом, это уравнение является искомым уравнением малых поперечных колебаний струны

Критерии оценивания:

- анализ физических составляющих процесса поперечных колебаний и построение его математической модели с использованием закона Гука;
- вывод дифференциального уравнения в частных производных, решение которого описывает этот процесс

Компетенции: ПК-1, ПК-3

3. Построить математическую модель вытекания жидкости из конического сосуда и на её основе решить следующую задачу. Два одинаковых сосуда имеют форму прямого кругового конуса с вертикальной осью. Их высота равна  $H$ , а радиус основания –  $R$ . Но вершина одного из конусов расположена вверху, а другого – внизу. Оба сосуда наполнены водой, которая вытекает через небольшие одинаковые отверстия внизу. Из какого сосуда вода вытечет быстрее.

(Справочная информация: Рекомендуется использовать формулу Торричелли, которая связывает скорость истечения идеальной жидкости из малого отверстия в открытом сосуде с высотой жидкости над отверстием, а именно,  $V = 0,6 \cdot \sqrt{2gh}$ , где  $h$  – высота уровня воды над отверстием,  $g$  – ускорение силы тяжести.)

Привести расширенное решение.

Время выполнения – 30 мин.

Ожидаемый результат.

Полагаем, что время  $t$ , за которое уровень воды в первом или во втором сосуде понизится на величину  $x$ , есть некоторая функция  $t(x)$  и найдём её дифференциал  $dt$  при изменении  $x$  на величину  $dx$ .

Пусть понижению уровня воды в сосуде на  $dx$  соответствует малое приращение времени  $dt$ . Тогда, с учётом заданной формулы, объём воды, вытекшей за время  $dt$  через отверстие в дне площадью  $\pi r^2$ , будет равен  $dV = 0,6\pi r^2 \sqrt{2g(H-x)}dt$ . За это же время  $dt$  объём воды в сосуде уменьшится на величину  $dV_1 = \pi y^2 dx$ , которая должна быть равна объёму вытекшей воды  $dV$ . Отсюда, из равенства  $dV = dV_1$ , получим:

$$dt = \frac{y^2 dx}{0,6r^2 \sqrt{2g(H-x)}}$$

Время  $T$  полного опорожнения первого или второго сосуда получим, интегрируя  $dt$  в пределах от  $x = 0$  до  $x = H$ :

$$T = \frac{1}{0,6r^2 \sqrt{2g}} \int_0^H \frac{y^2 dx}{\sqrt{H-x}}$$

Для вычисления этого интеграла выразим переменную  $y$  через переменную  $x$ . Из подобия треугольников имеем:

1) для первого сосуда  $\frac{H}{R} = \frac{H-x}{y} \Rightarrow y = \frac{R}{H}(H-x)$ ;

2) для второго сосуда  $\frac{H}{R} = \frac{x}{y} \Rightarrow y = \frac{R}{H}x$ .

Поэтому, время  $T_1$  полного опорожнения первого сосуда будет

$$T_1 = \frac{R^2}{0,6r^2H^2\sqrt{2g}} \int_0^H \frac{(H-x)^2 dx}{\sqrt{H-x}} = \frac{2R^2}{3r^2} \sqrt{\frac{H}{2g}}$$

3) Время  $T_2$  опорожнения второго сосуда выражается интегралом

$$T_2 = \frac{R^2}{0,6r^2H^2\sqrt{2g}} \int_0^H \frac{x^2 dx}{\sqrt{H-x}} = \frac{16R^2}{9r^2} \sqrt{\frac{H}{2g}}$$

Последний интеграл вычисляется с помощью подстановки  $z = H - x$ .

Для сопоставления  $T_1$  и  $T_2$  найдём их отношение  $\frac{T_1}{T_2} = \frac{3}{8}$ .

Из первого сосуда вода вытечет значительно быстрее, чем из второго.

Критерии оценивания:

– анализ физических составляющих процесса вытекания жидкости из резервуара заданной формы;

– получение формулы для определения времени вытекания жидкости из сосуда с последующим её применением для заданных сосудов.

Компетенции: ПК-1, ПК-3

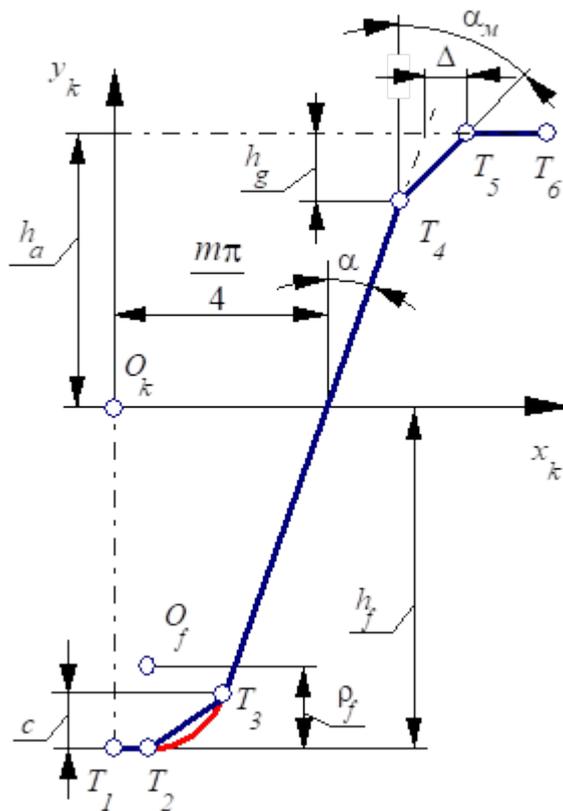
4. Построить математическую модель процесса обработки зубьев колес, которая служит инструментом построения картин обкатки.

Рассмотреть процесс при наличии следующих предположений:

а) профилирование впадины зуба колеса происходит в торцовом сечении колеса, то есть в сечении, перпендикулярном оси вращения колеса.

б) торцовый исходный производящий контур является модельным представлением производящей рейки инструмента.

(Справочная информация: предполагается, что моделирование производится в соответствии со следующей схемой расчета профиля производящего контура)



Привести расширенное решение.

Время выполнения – 45 мин.

Ожидаемый результат.

Исходный производящий контур целесообразно представлять как объединение двух симметричных полупрофилей, каждый из которых представляет собой список точек вещественной плоскости, координаты которых определяются в декартовой системе координат  $x_k y_k$ . В общем случае, алгоритм построения полупрофиля является следующим.

1. Определяются координаты точки  $T_1$ .

$$x_k = 0, y_k = -h_f = -m(h_a^* + -^*), \quad (1)$$

где  $m$  - модуль колеса.

2. Определяются координаты точек на дуге переходной окружности  $T_2 T_3$ . Число  $n_\rho$  точек на дуге окружности и угловой шаг между точками  $\varphi_\rho$  определяются исходя из заданной точности описания  $\varepsilon$  (мм)

$$n_\rho = \left\lceil \frac{\frac{\pi}{2} - \alpha}{2 \text{ArcCos}\left(\frac{\rho_f - \varepsilon}{\rho_f}\right) + 1} \right\rceil, \quad \varphi_\rho = \frac{\frac{\pi}{2} - \alpha}{n_\rho}. \quad (2)$$

Тогда координаты точек на дуге переходной кривой могут быть определены по формулам

$$x_k = x_{kO_\rho} + \rho_f \sin(j\varphi_\rho), \quad y_k = y_{kO_\rho} - \rho_f \cos(j\varphi_\rho), \quad j = 0 \dots n_\rho, \quad (3)$$

где  $x_{kO_\rho}, y_{kO_\rho}$  - координаты центра дуги переходной окружности  $O_\rho$  в системе координат  $x_k y_k$ . При  $j = 0$  будут получены координаты точки  $T_2$ , при  $j = n_\rho$  - координаты точки  $T_3$ .

3. Если исходный профиль модифицирован, определяются координаты начальной точки участка модификации  $T_4$ .

$$x_k = \frac{m\pi}{4} + tg(\alpha)(h_a - h_g), y_k = h_a - h_g = m(h_a^* - h_g^*), (4)$$

4. Определяются координаты точки  $T_5$ . В случае, если исходный профиль является модифицированным,  $x_k$  определяется по формуле

$$x_k = \frac{m\pi}{4} + tg(\alpha)(h_a - h_g) + tg(\alpha'')h_g, \text{ где } tg(\alpha'') = tg(\alpha) + \frac{\Delta}{h_g}, (5)$$

в противном случае

$$x_k = \frac{m\pi}{4} + tg(\alpha)h_a. (6)$$

Кроме того, в обоих случаях  $y_k = h_a$ .

Координаты точки  $T_6$  можно не определять, так как эта точка не участвует в формировании профиля зуба. Переход от нормального производящего контура к торцовому производится делением каждой из координат  $x_k$  профиля нормального производящего контура на  $\cos(\beta)$ , где  $\beta$  - угол наклона винтовой линии зуба нарезаемого колеса. Переход от правого полупрофиля к левому производится изменением знака координаты  $x_k$  каждой из точек полупрофиля.

Критерии оценивания:

– анализ физических составляющих процесса нарезки зубьев в соответствии с приведенной схемой;

– построение алгоритма расчёта профиля зуба

Компетенции: ПК-1, ПК-3

5. Построить математическую модель и на её основе решить задачу вычисления работы силы трения в плоской сплошной пяте.

Привести расширенное решение.

Время выполнения – 30 мин.

Ожидаемый результат.

Пусть

$F$  – полное давление, передаваемое пятой;

$\omega$  - угловая скорость вращения вала;

$\mu$  - коэффициент трения;

$p$  - давление на единицу площади пяты.

1. Разбиваем трущуюся поверхность на элементарные кольца, ограниченные окружностями радиусов  $r$  и  $r + dr$ . Их площадь равна  $dS = 2\pi r dr$ . Если  $p$  – есть давление в точке, отстоящей от центра на расстоянии  $r$ , то на рассматриваемое кольцо будет действовать элементарная сила давления  $dF = p \cdot dS = 2\pi p r dr$ . Суммируя силы давления по всем кольцам, получаем равенство:

$$F = 2\pi \cdot \int_{r_0}^R p r dr \quad (1)$$

2. Определяем момент  $M$  силы трения во вращающейся пяте относительно оси вращения, учитывая, что сила трения, развивающаяся в элементарном кольце и противодействующая вращению, будет равна  $\mu \cdot$

$dF = 2\pi\mu pr \cdot dr$ . Тогда соответствующий ей элементарный момент  $dM$  выразится в виде произведения этой силы на плечо  $r$   $dM = 2\pi\mu pr^2 \cdot dr$ . Полный момент трения будет равен

$$M = \int_{r_0}^R dM = 2\pi\mu \int_{r_0}^R pr^2 dr$$

Работа, производимая таким вращательным моментом, равна

$$A = M \cdot \omega = 2\pi\mu\omega \int_{r_0}^R pr^2 dr \quad (2)$$

3. По условию, отношение  $\frac{dA}{dS} = c$  Но  $dA = \omega \cdot dM$ ;  $dS = 2\pi r dr$ . Тогда  $\omega\mu pr = \text{const}$ . Откуда  $pr = c = \text{const}$ . Величина этой постоянной  $p$  определяется из условия (1):

$$F = 2\pi c \int_{r_0}^R dr \Rightarrow c = \frac{F}{2\pi(R - r_0)}$$

Подставляя найденное значение  $p$  в (2), находим искомую работу

$$A = 2\pi\mu\omega \cdot \frac{F}{2\pi(R - r_0)} \cdot \int_{r_0}^R r dr = \frac{1}{2}\mu\omega F \cdot (R + r_0)$$

В частности, для сплошной пяты  $r_0 = 0$  и  $A = \frac{1}{2} \cdot \mu\omega FR$ .

Критерии оценивания:

- анализ физических составляющих процесса трения в пяте в предположении, что давление  $p$  распределяется по поверхности трения так, что работа сил трения, отнесенная к единице площади (изнашивание), сохраняет постоянную величину (пята старая и хорошо приработанная);
- вычисление работы переменной силы трения с целью получения искомого результата.

Компетенции: ПК-1, ПК-3

## Экспертное заключение

Представленный комплект оценочных материалов по дисциплине «Математическое моделирование сложных систем» соответствует требованиям ФГОС ВО.

Предлагаемые оценочные материалы адекватны целям и задачам реализации основной профессиональной образовательной программы по направлению подготовки 01.04.02 Прикладная математика и информатика.

Виды оценочных средств, включенные в представленный фонд, отвечают основным принципам формирования ФОС.

Разработанные и представленные для экспертизы оценочные материалы рекомендуются к использованию в процессе подготовки обучающихся по указанному направлению.

Председатель учебно-методической комиссии  
института компьютерных систем и  
информационных технологий

Ветрова Н. Н.

### Лист изменений и дополнений

№ п/п	Виды дополнений и изменений	Дата и номер протокола заседания кафедры (кафедр), на котором были рассмотрены и одобрены изменения и дополнения	Подпись (с расшифровкой) заведующего кафедрой (заведующих кафедрами)
1.	Дополнен комплектом оценочных материалов	протокол заседания кафедры прикладной математики № <u>8</u> от <u>24.02.2025</u>	 В.В. Малый