# Комплект оценочных материалов по дисциплине «Теория игр и ее приложения»

### Задания закрытого типа

#### Задания закрытого типа на выбор правильного ответа

1. Выберите один правильный ответ

Матричная игра – это частный случай антагонистической игры, при котором обязательно выполняется одно из требований:

А) один из игроков имеет бесконечное число стратегий.

Б) оба игрока имеют бесконечно много стратегий.

В) оба игрока имеют одно и то же число стратегий.

Г) оба игрока имеют конечное число стратегий.

Правильный ответ: Г

Компетенции: ОПК-1, ОПК-3

2. Выберите один правильный ответ

В матричной игре произвольной размерности смешанная стратегия любого игрока – это:

А) число.

Б) множество.

В) вектор, или упорядоченное множество.

Г) функция.

Правильный ответ: В

Компетенции: ОПК-1, ОПК-3

3. Выберите один правильный ответ

Биматричная игра может быть определена:

А) двумя матрицами только с положительными элементами.

Б) двумя произвольными матрицами.

В) одной матрицей.

Г) двумя матрицами только с отрицательными элементами

Правильный ответ: Б

Компетенции: ОПК-1, ОПК-3

4. Выберите один правильный ответ

В матричной игре элемент представляет собой:

А) выигрыш первого игрока при использовании им стратегии, а вторым игроком – стратегии.

Б) оптимальную стратегию первого игрока при использовании противником или стратегии.

В) проигрыш первого игрока при использовании им стратегии, а вторым игроком стратегии.

Г) выигрыш первого игрока при использовании им стратегии, а вторым игроком – стратегии.

Правильный ответ: А

Компетенции: ОПК-1, ОПК-3

5. Выберите один правильный ответ

Антагонистическая игра может быть задана:

А) седловыми точками.

Б) множеством стратегий обоих игроков и функцией выигрыша второго игрока.

В) седловой точкой и ценой игры.

Г) функцией выигрыша второго игрока

Правильный ответ: Б

Компетенции: ОПК-1, ОПК-3

6. Выберите один правильный ответ

Для платежной матрицы матричной игры определите седловую точку:

А)

Б)

В)

Г)

Правильный ответ: Б

Компетенции: ОПК-1, ОПК-3

#### Задания закрытого типа на установление соответствия

1. Установите правильное соответствие. Каждому элементу левого столбца соответствует только один элемент правого столбца.

Установите соответствие между терминами и их определениями.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | Описание |  | Термин |
| 1) | Конечная парная игра с ненулевой суммой | А) | Биматричная игра |
| 2) | Игры, задающиеся в виде дерева игры. | Б) | Позиционные игры |
| 3) | Игра, в которой выигрыш одного игрока равен проигрышу второго, а, следовательно, цели этих игроков прямо противоположны. | В) | Дифференциальные игры |
| 4) | Игры, в которых ходы делаются непрерывно | Г) | Антагонистическая игра |

Правильный ответ:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| А | Б | Г | В |

Компетенции: ОПК-1, ОПК-3

2. Установите правильное соответствие. Каждому элементу левого столбца соответствует только один элемент правого столбца.

Установите соответствие между свойством характеристической функции и его значением

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | Свойство характеристической функции |  | Значение |
| 1) | Персональность | А) | У больших коалиций выигрыши больше |
| 2) | Дополнительность | Б) | Общий выигрыш коалиции должен быть не меньше суммарного выигрыша всех участников коалиции |
| 3) | Монотонность | В) | Сумма выигрышей коалиции и остальных игроков должна равняться общей сумме выигрышей всех игроков |
| 4) | Супер аддитивность | Г) | Пустая коалиция не получает ничего |

Правильный ответ:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| В | Г | Б | А |

Компетенции: ОПК-1, ОПК-3

3. Установите правильное соответствие. Каждому элементу левого столбца соответствует только один элемент правого столбца.

Для заданной платежной матрицы матричной игры её нижняя и верхняя цена игры соответственно равны

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | Платежная матрица матричной игры |  | Нижняя цена игры  Верхняя цена игры |
| 1) |  | А) |  |
| 2) |  | Б) |  |
| 3) |  | В) |  |
| 4) |  | Г) |  |

Правильный ответ:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| А | Б | Г | В |

Компетенции: ОПК-1, ОПК-3

4. Установите правильное соответствие. Каждому элементу левого столбца соответствует только один элемент правого столбца.

Для заданной матрице выигрышей (или матрице потерь ) статистической игры матрица рисков равна .

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | Матрица выигрышей или матрица потерь |  | Матрица рисков . |
| 1) |  | А) |  |
| 2) |  | Б) |  |
| 3) |  | В) |  |
| 4) |  | Г) |  |

Правильный ответ:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| Б | А | В | Г |

Компетенции: ОПК-1, ОПК-3

#### Задания закрытого типа на установление правильной последовательности

последовательности

1. Упорядочьте платежные матрицы по величине возрастания седловой точки.

А)

Б)

В)

Г)

Правильный ответ: Г, А, В, Б

Компетенции: ОПК-1, ОПК-3

2. Укажите правильную последовательность реализации следующих основных действий при математическом моделировании процессов или объектов.

А) Формулирование законов, связывающих основные объекты модели, результат - запись в математических терминах сформулированных качественных представлений о связях между объектами модели

Б) Исследование математических задач, к которым приводят математические модели для решения основной задачи – получение в результате анализа модели выходных данных (теоретических следствий) для сопоставления их с результатами наблюдений изучаемых явлений

В) Выяснение соответствия принимаемой (гипотетичной) модели критерию практики, т.е. выяснение вопроса о том, согласуется ли результат наблюдений с теоретическими следствиями модели в пределах точности наблюдений.

Г) Последующий анализ модели в связи с накоплением данных об изучаемых явлениях и модернизация модели

Правильный ответ: Г, А, Б, В

Компетенции: ОПК-1, ОПК-3

### Задания открытого типа

#### Задания открытого типа на дополнение

1. Напишите пропущенное слово (словосочетание).

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ – это игры, в которых игроки не имеют право вступать в соглашения, и целью каждого игрока является получение по возможности наибольшего индивидуального выигрыша.

Правильный ответ: Бескоалиционные игры

Компетенции: ОПК-1, ОПК-3

2. Напишите пропущенное слово (словосочетание).

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_– это стратегия, обеспечивающая данному игроку при многократном повторении игры максимально возможный средний выигрыш или минимально возможный средний проигрыш, независимо от того, какие стратегии применяет противник.

Правильный ответ: Оптимальная стратегия

Компетенции: ОПК-1, ОПК-3

3. Напишите пропущенное слово (словосочетание).

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_– это матричная игра, в которой нижняя цена и верхняя цена совпадаю.

Правильный ответ: Игра с седловой точкой

Компетенции: ОПК-1, ОПК-3

4. Напишите пропущенное слово (словосочетание).

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_– это принцип, диктующий игрокам выбор наиболее «осторожных» минимаксной и максиминной стратегий.

Правильный ответ: Принцип минимакса

5. Напишите пропущенное слово (словосочетание).

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_– это игра, в которой коалиция выигрывает

только тогда, когда дополняющая коалиция (оппозиция) проигрывает.

Правильный ответ: Простая правильная игра

Компетенции: ОПК-1, ОПК-3

6. Напишите пропущенное слово (словосочетание).

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_– это мера несоответствия между разными возможными результатами принятия определенных стратегий (действий).

Правильный ответ: Риск

Компетенции: ОПК-1, ОПК-3

#### Задания открытого типа с кратким свободным ответом

1. Если матричная игра с платежной матрицей имеет цену игры, равную , то чему будет равна цена матричной игры, заданной матрицей

Правильный ответ: Цена матричной игры равна

Компетенции: ОПК-1, ОПК-3

2. Дана матрица рисков

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  | 3 | 1 | 0 |
|  | 0 | 6 | 3 |
|  | 9 | 7 | 0 |

Нужно найти номер оптимальной стратегии по критерию Сэвиджа.

Правильный ответ: номер оптимальной стратегии по критерию Сэвиджа равен .

Компетенции: ОПК-1, ОПК-3

3. Фирма решает, какое по размеру построить предприятие: малое, среднее или крупное. Ожидаемая прибыль зависит от будущего спроса на выпускаемую продукцию. Вероятность низкого спроса - 0.3; среднего - 0.5; высокого - 0.2. Ожидаемая прибыль (млн. руб.) представлена в таблице

Нужно определить номер оптимальной стратегии.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Альтернативы | Спрос | | |
| Низкий | Средний | Высокий |
| 1. Малое предприятие | 10 | 10 | 10 |
| 2. Среднее предприятие | 7 | 12 | 12 |
| 3. Крупное предприятие | -4 | 2 | 16 |

Правильный ответ: Номер оптимальной стратегии равен . (Среднее предприятие).

Компетенции: ОПК-1, ОПК-3

#### Задания открытого типа с развернутым ответом

1. Решить матричную игру с платежной матрицей

.

Привести расширенное решение.

Время выполнения – 60 мин.

Ожидаемый результат:

1. Выясним, имеет ли игра решение в чистых стратегиях. Для этого вычислим нижнюю и верхнюю цены игры в чистых стратегиях:

; .

, следовательно, матрица не имеет седловой точки, и игра не разрешима в чистых стратегиях

2. Будем искать решение игры в смешанных стратегиях. Смешанная стратегия игрока — это вероятностный вектор:

, где ; .

Аналогично, смешанная стратегия игрока — это вероятностный вектор:

, где ; .

3. Заметим, что каждый элемент строки 1 не меньше соответствующего элемента строки 3, то есть выигрыш игрока при выборе им чистых стратегиях 1 не меньше его выигрыша при выборе им чистых стратегиях 3. Ясно, что разумный игрок предпочтет стратегию 1 стратегии 3. В этом случае говорят, что чистых стратегиях 1 игрока доминирует над его чистых стратегиях 3. Аналогично, каждый элемент столбца 2 не больше соответствующего элемента столбца 3, и чистых стратегиях 2 игрока доминирует над его чистых стратегиях 3. Легко понять, что в оптимальные смешанных стратегиях доминируемые чистых стратегиях войдут с нулевыми вероятностями , . Поэтому в дальнейшем мы можем рассматривать сокращенную матрицу игры, полученную из исходной вычеркиванием третьей строки и третьего столбца:

.

4. "Сдвиг" матрицы. Вместо матрицы рассмотрим матрицу

,

полученную из матрицы добавлением одного и того же числа ко всем ее элементам. Число это (в данном случае 2) выбирается так, чтобы все элементы матрицы стали неотрицательными. Несложно показать, что такой сдвиг платежной матрицы не приводит к изменению оптимальных смешанных стратегий игроков. Изменяется только значение цены игры, в данном случае оно увеличивается на 2.

Смысл такого сдвига в следующем. В игре с платежной матрицей выигрыш игрока в любой ситуации неотрицателен, а значит не отрицательны и все его гарантированные выигрыши, а также цена игры в смешанных стратегиях. Это дает нам право, составляя пару двойственных задач ЛП, считать переменные неотрицательными.

5. Составляем пару двойственных задач ЛП для игры с платежной матрицей :

(1)

Прежде чем решать их, удобно сделать замену переменных , , =1,2. Тогда задачи принимают вид:

(2)

6. Приводим вторую задачу к канонической форме (вводя дополнительные переменные ), и решаем ее симплекс-методом:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | t0 | t1 | t2 | t3 | t4 |
| f | 0 | -1 | -1 | 0 | 0 |
| t3 | 1 | 3 | 1 | 1 | 0 |
| t4 | 1 | 0 | 4 | 0 | 1 |

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | t0 | t1 | t2 | t3 | t4 |
| f | 1/3 | 0 | -2/3 | 1/3 | 0 |
| t3 | 1/3 | 1 | 1/3 | 1/3 | 0 |
| t4 | 1 | 0 | 4 | 0 | 1 |

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | t0 | t1 | t2 | t3 | t4 |
| f | 1/2 | 0 | 1 | 1/3 | 1/6 |
| t3 | 1/4 | 1 | 0 | 1/3 | -1/12 |
| t4 | 1/4 | 0 | 1 | 0 | 1/4 |

Оптимальное решение , . Используя вторую теорему двойственности, находим оптимальное решение двойственной задачи:, . Возвращаясь к исходным переменным и вспоминая, что , , получаем оптимальные смешанных стратегиях игроков: , . Цена игры в смешанных стратегиях равна 0 (с учетом сдвига матрицы).

Ответ. Оптимальные смешанных стратегиях игроков диктуют им следующие действия при многократном повторении игры: игроку следует выбирать свою первую чистых стратегиях с вероятностью 2/3, а вторую - с вероятностью 1/3. Игроку - выбирать как первую, так и вторую чистых стратегиях с вероятностью 1/2. При этом ожидаемый средний выигрыш игрока (и проигрыш игрока ) будет равен нулю - ничья.

Критерии оценивания:

– анализ заданной матричной игры на наличие чистых или смешанных стратегий;

– построение математической модели задачи в виде задачи линейного программирования;

– численное решение сформированной оптимизационной задачи.

Компетенции: ОПК-1, ОПК-3

2. Найти оптимальную стратегию игроков и цену матричной игры с платежной матрицей

Привести расширенное решение.

Время выполнения – 60 мин.

Ожидаемый результат:

1. Данная игра не имеет ситуации равновесия в чистых стратегиях, причем

2. Проверим условия доминирования.

2.1. Найти для которого , т. е. строка доминируется выпуклой комбинацией первых двух строк и . Последнее неравенство запишем поэлементно:

Тогда получим Таким образом, строка доминируема, ее можно вычеркнуть, при этом . Получим новую матрицу

2.2. В матрице имеем т. е. — доминируемый столбец, его можно вычеркнуть, при этом . Получим новую матрицу

2.3. Найти для которого :

откуда получим т. е — доминируемый столбец, его можно вычеркнуть, при этом Получим новую матрицу

3. Поиск оптимальных смешанных стратегий.

Задача для игрока 1. В соответствии с методом имеем

Из получим решение .

Итак, имеем оптимальную стратегию игрока 1 (с учетом ): Значение игры .

Задача для игрока 2. В соответствии с методом имеем

Из получим решение .

Ответ. Таким образом, имеем оптимальную стратегию игрока 2 (с учетом ): Значение игры

Критерии оценивания:

– анализ заданной матричной игры на наличие чистых или смешанных стратегий;

– построение математической модели задачи в виде задачи линейного программирования;

– численное решение сформированной оптимизационной задачи.

Компетенции: ОПК-1, ОПК-3

3. Дать графическое изображение, привести к нормальной форме и найти решение следующей позиционной игры:

Ход 1. Первый игрок выбирает число из множества двух чисел .

Ход 2. Второй игрок выбирает число из множества двух чисел , не зная значения .

Ход 3. Первый игрок выбирает число из множества двух чисел , не зная значений ни , ни .

После того, как сделаны все три хода, второй игрок платит первому игроку сумму , заданную следующим образом:

, , , ,

, , , .

Привести расширенное решение.

Время выполнения – 60 мин.

Ожидаемый результат:

Построим дерево позиционной игры. Оно состоит из узлов и конечного числа направленных вверх прямолинейных отрезков, соединяющих эти узлы, каждый узел обозначается цифрой, соответствующей номеру игрока, делающего ход, и изображает ход этого игрока, поэтому каждому ходу соответствует набор узлов, расположенных на одном определенном уровне.

На самом низшем уровне имеется только один узел – основание дерева, каждый узел соединяется только с одним узлом на низшем уровне, каждый прямолинейный отрезок означает выбор, сделанный игроком на данном ходе, и обозначается номером, соответствующим сделанному выбору. Если в игре используется ход, осуществляемый не игроком, а случайным механизмом, то обычно узлу, соответствующему данному ходу, присваивается номер 0 (нуль). Вершинами дерева являются окончания прямолинейных отрезков, исходящих из узлов последнего уровня. Ветвью дерева называется ломаная линия, состоящая из прямолинейных отрезков дерева, которая начинается в самом нижнем узле и идет вверх последовательно через соответствующие узлы до вершины дерева. Каждая ветвь дерева отображает партию игры.

Для изображения необходимых сведений о сделанных выборах при определенных ходах игроков на дереве игры отмечают пунктиром так называемые информационные множества узлов определенного игрока. В каждое информационное множество входят только неразличимые для игрока узлы, т. е. только те узлы, для каждой пары из которых соответствующий игрок не может точно указать, в какой точке дерева он находится, делая этот ход.

Поскольку второму игроку не известен выбор первого игрока на первом ходе, то, выполняя свой ход, он не знает точно, в каком узле находится. Поэтому узлы второго уровня образуют информационное множество. Аналогично для первого игрока на третьем ходе, Графическое представление этой игры изображено на рис. 1.

Приведем эту игру к нормальной форме, т.е. к матричной игре. У первого игрока немного возможностей за счет недостатка информации, а именно: поскольку он на третьем ходе не знает предыдущих выборов, то его стратегия состоит из пары чисел . т.е. выбирать или на первом ходе и выбирать или на третьем ходе. Итак. У первого игрока имеется четыре стратегии: , , , .

У второго игрока всего две стратегии: 1-я – выбрать число 1 и 2-я стратегия – выбрать число 2. Матрица выигрышей первого игрока представлена в табл. 1.

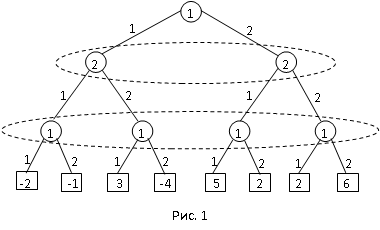


Таблица 1.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1-й игрок | 2-й игрок | |
|  |  |
|  | -2 | 3 |
|  | -1 | -4 |
|  | 5 | 2 |
|  | 2 | 6 |

В результате получилась игра порядка . Известно, что игры порядка и можно решать графически.

Легко убедиться, что данная игра не имеет седловой точки в чистых стратегиях, т.к. и , т.е. . Тогда необходимо найти такие смешанные стратегии и соответственно первого и второго игроков и цену игры , которые удовлетворяют соотношениям:

(1)

(2)

Необходимо определить смешанные стратегии и соответственно первого и второго игроков. Данную задачу можно решить графически относительно стратегий второго игрока и , используя соотношения (1). Пусть по горизонтальной оси откладывается значение от 0 до 1, по вертикальной – значение среднего выигрыша первого игрока при условии, что он применяет свою чистую -ю стратегию , второй – свою смешанную стратегию . Используя соотношения (1), получим уравнения средних выигрышей второго игрока:

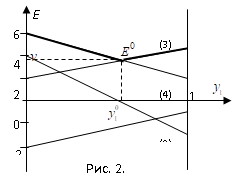
(3)

Графически могут быть представлены так, как изображено на рис. 2. Первый игрок старается максимизировать свой выигрыш, поэтому он стремится найти

.

На рис. 2 функция изображена жирной линией и представляет собой верхнюю границу множества ограничений. Второй игрок старается минимизировать за счет выбора своей стратегии , т.е. величина соответствует

.



На рис. 2 значение обозначено точкой . Другими словами, определяются такие две стратегии первого игрока и вероятность для второго игрока, при которых достигается равенство

,

или, как видно из рис. 2 точку образуют третья и четвертая стратегии первого игрока. Следовательно, , и для определения и надо составить уравнения, соответствующие этим стратегиям:

Решение этих уравнений: .

Для определения и следует решить первое и третье уравнения системы (2)

,

или второе и третье уравнения системы (2)

.

В результате решения получим стратегию первого игрока:

.

Ответ. Стратегия первого игрока

Критерии оценивания:

– построение дерева заданной позиционной игры.

– анализ логики действия игроков и формирование математической модели задачи;

– численное решение сформированной оптимизационной задачи геометрическая интерпретация оптимального действия игроков.

Компетенции: ОПК-1, ОПК-3

4. Решить следующую биматричную игру:

Министерство планирует наладить выпуск одного из двух продукции на территории города. Городские власти могут принять предложение министерства или отказать. Министерство – первый игрок – имеет две стратегии: выпуск 1-ого вида продукции, выпуск 2-ого вида продукции. Город – второй игрок – имеет две стратегии: принять предложение министерства или отказать. Свои действия (стратегии) они применяют независимо друг от друга, и результаты определяются прибылью (выигрышем) согласно следующим матрицам:

Определить оптимальные стратегии игроков и их оптимальные средние выигрыши.

Привести расширенное решение.

Время выполнения – 30 мин.

Решение.

Некоторые пояснения к элементам выигрышей матриц и могут быть, например, такие: если игроки применяют свои первые стратегии, министерство принимает решение о выпуске первого вида продукции, а городские власти разрешают ее выпуск, тогда город получает выигрыш 5 млн. руб., а министерство теряет 10 млн. руб., аналогично объясняются остальные выигрыши.

Для этой игры имеем:

,

, .

Поскольку , то множество решений имеет следующий вид:

, где , где

, где .

Множество ситуаций, применяемых для первого игрока, изображено на рис. 3 жирной линией.

Для второго игрока имеем:

,

, .



1



0



*С*

1



Рис. 3.

Поскольку , то множество решений имеет следующий вид:

, где

, где

, где .

Множество ситуаций, приемлемых для второго игрока изображено на рис. 3 пунктирной линией.

Точка пересечения множеств и есть точка с координатами , и представляет соответственно приемлемые стратегии (ситуацию равновесия) министерства и города.

При этом их выигрыш соответственно равен

;

.

Ответ. Для получения оптимального среднего выигрыша (проигрыша) каждый из игроков должен применить следующие стратегии и соответственно.

Критерии оценивания:

– формализация исходных данных и построение соответствующей математической модели задачи.

– геометрическая интерпретация возможных ситуаций поэтапного решения

– численное решение сформированной задачи и геометрическая интерпретация оптимального действия игроков.

Компетенции: ОПК-1, ОПК-3