

Комплект оценочных материалов по дисциплине «Теория игр и ее приложения»

Задания закрытого типа

Задания закрытого типа на выбор правильного ответа

1. Выберите один правильный ответ

Матричная игра – это частный случай антагонистической игры, при котором обязательно выполняется одно из требований:

- А) один из игроков имеет бесконечное число стратегий.
- Б) оба игрока имеют бесконечно много стратегий.
- В) оба игрока имеют одно и то же число стратегий.
- Г) оба игрока имеют конечное число стратегий.

Правильный ответ: Г

Компетенции: ОПК-1, ОПК-3

2. Выберите один правильный ответ

В матричной игре произвольной размерности смешанная стратегия любого игрока – это:

- А) число.
- Б) множество.
- В) вектор, или упорядоченное множество.
- Г) функция.

Правильный ответ: В

Компетенции: ОПК-1, ОПК-3

3. Выберите один правильный ответ

Биматричная игра может быть определена:

- А) двумя матрицами только с положительными элементами.
- Б) двумя произвольными матрицами.
- В) одной матрицей.
- Г) двумя матрицами только с отрицательными элементами

Правильный ответ: Б

Компетенции: ОПК-1, ОПК-3

4. Выберите один правильный ответ

В матричной игре элемент a_{ij} представляет собой:

А) выигрыш первого игрока при использовании им i – й стратегии, а вторым игроком – j – й стратегии.

Б) оптимальную стратегию первого игрока при использовании противником i – й или j – й стратегии.

В) проигрыш первого игрока при использовании им j – й стратегии, а вторым игроком i – й стратегии.

Г) выигрыш первого игрока при использовании им j – й стратегии, а вторым игроком – i – й стратегии.

Правильный ответ: А

Компетенции: ОПК-1, ОПК-3

5. Выберите один правильный ответ

Антагонистическая игра может быть задана:

А) седловыми точками.

Б) множеством стратегий обоих игроков и функцией выигрыша второго игрока.

В) седловой точкой и ценой игры.

Г) функцией выигрыша второго игрока

Правильный ответ: Б

Компетенции: ОПК-1, ОПК-3

6. Выберите один правильный ответ

Для платежной матрицы $P = \begin{pmatrix} 20 & -21 & -22 \\ 21 & 0 & -21 \\ 23 & 13 & 20 \end{pmatrix}$ матричной игры

определите седловую точку:

А) 10

Б) 13

В) 0

Г) –1

Правильный ответ: Б

Компетенции: ОПК-1, ОПК-3

Задания закрытого типа на установление соответствия

1. Установите правильное соответствие. Каждому элементу левого столбца соответствует только один элемент правого столбца.

Установите соответствие между терминами и их определениями.

	Описание		Термин
1)	Конечная парная игра с ненулевой суммой	А)	Биматричная игра
2)	Игры, задающиеся в виде дерева игры.	Б)	Позиционные игры

3)	Игра, в которой выигрыш одного игрока равен проигрышу второго, а, следовательно, цели этих игроков прямо противоположны.	В)	Дифференциальные игры
4)	Игры, в которых ходы делаются непрерывно	Г)	Антагонистическая игра

Правильный ответ:

1	2	3	4
А	Б	Г	В

Компетенции: ОПК-1, ОПК-3

2. Установите правильное соответствие. Каждому элементу левого столбца соответствует только один элемент правого столбца.

Установите соответствие между свойством характеристической функции и его значением

	Свойство характеристической функции		Значение
1)	Персональность	А)	У больших коалиций выигрыши больше
2)	Дополнительность	Б)	Общий выигрыш коалиции должен быть не меньше суммарного выигрыша всех участников коалиции
3)	Монотонность	В)	Сумма выигрышей коалиции и остальных игроков должна равняться общей сумме выигрышей всех игроков
4)	Супер аддитивность	Г)	Пустая коалиция не получает ничего

Правильный ответ:

1	2	3	4
В	Г	Б	А

Компетенции: ОПК-1, ОПК-3

3. Установите правильное соответствие. Каждому элементу левого столбца соответствует только один элемент правого столбца.

Для заданной платежной матрицы P матричной игры её нижняя α и верхняя β цена игры соответственно равны

	Платежная матрица P матричной игры		Нижняя цена игры α Верхняя цена игры β
1)	$P = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$	А)	$\{\alpha = 4; \beta = 5\}$
2)	$P = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 4 \\ 0 & 5 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$	Б)	$\{\alpha = 3; \beta = 4\}$
3)	$P = \begin{pmatrix} 11 & 5 & 1 & 3 \\ 13 & 2 & 2 & -4 \\ -2 & -3 & 4 & 11 \\ 5 & -3 & 12 & -6 \end{pmatrix}$	В)	$\{\alpha = -1; \beta = 4\}$
4)	$P = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & -4 \\ -2 & 1 & 4 & 1 \\ 5 & -3 & -3 & 6 \end{pmatrix}$	Г)	$\{\alpha = 1; \beta = 5\}$

Правильный ответ:

1	2	3	4
А	Б	Г	В

Компетенции: ОПК-1, ОПК-3

4. Установите правильное соответствие. Каждому элементу левого столбца соответствует только один элемент правого столбца.

Для заданной матрицы выигрышей P (или матрице потерь Q) статистической игры матрица рисков равна R .

	Матрица выигрышей P или матрица потерь Q		Матрица рисков R .
1)	$P = \begin{pmatrix} 30 & 25 & 40 \\ 20 & 50 & 30 \\ 45 & 20 & 30 \end{pmatrix}$	А)	$R = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 10 \\ 0 & 25 & 0 \\ 25 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
2)	$Q = \begin{pmatrix} 30 & 25 & 40 \\ 20 & 50 & 30 \\ 45 & 20 & 30 \end{pmatrix}$	Б)	$R = \begin{pmatrix} 14 & 25 & 0 \\ 25 & 0 & 10 \\ 0 & 3 & 10 \end{pmatrix}$

3)	$P = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 30 & 40 \\ 20 & 40 & 50 & 30 \\ 60 & 20 & 40 & 30 \\ 30 & 50 & 20 & 10 \end{pmatrix}$	В)	$R = \begin{pmatrix} 50 & 30 & 20 & 0 \\ 40 & 10 & 0 & 12 \\ 0 & 30 & 10 & 10 \\ 30 & 0 & 30 & 30 \end{pmatrix}$
4)	$Q = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 30 & 40 \\ 20 & 40 & 50 & 30 \\ 60 & 20 & 40 & 30 \\ 30 & 50 & 20 & 10 \end{pmatrix}$	Г)	$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 10 & 30 \\ 10 & 20 & 30 & 20 \\ 50 & 0 & 20 & 20 \\ 20 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Правильный ответ:

1	2	3	4
Б	А	В	Г

Компетенции: ОПК-1, ОПК-3

Задания закрытого типа на установление правильной последовательности

последовательности

1. Упорядочьте платежные матрицы по величине возрастания седловой точки.

А) $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$

Б) $P = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$

В) $P = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$

Г) $P = \begin{pmatrix} -7 & -1 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$

Правильный ответ: Г, А, В, Б

Компетенции: ОПК-1, ОПК-3

2. Укажите правильную последовательность реализации следующих основных действий при математическом моделировании процессов или объектов.

А) Формулирование законов, связывающих основные объекты модели, результат - запись в математических терминах сформулированных качественных представлений о связях между объектами модели

Б) Исследование математических задач, к которым приводят математические модели для решения основной задачи – получение в результате анализа модели выходных данных (теоретических следствий) для сопоставления их с результатами наблюдений изучаемых явлений

В) Выяснение соответствия принимаемой (гипотетичной) модели критерию практики, т.е. выяснение вопроса о том, согласуется ли результат наблюдений с теоретическими следствиями модели в пределах точности наблюдений.

Г) Последующий анализ модели в связи с накоплением данных об изучаемых явлениях и модернизация модели

Правильный ответ: Г, А, Б, В

Компетенции: ОПК-1, ОПК-3

Задания открытого типа

Задания открытого типа на дополнение

1. Напишите пропущенное слово (словосочетание).

_____ – это игры, в которых игроки не имеют право вступать в соглашения, и целью каждого игрока является получение по возможности наибольшего индивидуального выигрыша.

Правильный ответ: Бескоалиционные игры

Компетенции: ОПК-1, ОПК-3

2. Напишите пропущенное слово (словосочетание).

_____ – это стратегия, обеспечивающая данному игроку при многократном повторении игры максимально возможный средний выигрыш или минимально возможный средний проигрыш, независимо от того, какие стратегии применяет противник.

Правильный ответ: Оптимальная стратегия

Компетенции: ОПК-1, ОПК-3

3. Напишите пропущенное слово (словосочетание).

_____ – это матричная игра, в которой нижняя цена и верхняя цена совпадают.

Правильный ответ: Игра с седловой точкой

Компетенции: ОПК-1, ОПК-3

4. Напишите пропущенное слово (словосочетание).

_____ – это принцип, диктующий игрокам выбор наиболее «осторожных» минимаксной и максиминной стратегий.

Правильный ответ: Принцип минимакса

5. Напишите пропущенное слово (словосочетание).

_____ – это игра, в которой коалиция выигрывает только тогда, когда дополняющая коалиция (оппозиция) проигрывает.

Правильный ответ: Простая правильная игра

Компетенции: ОПК-1, ОПК-3

6. Напишите пропущенное слово (словосочетание).

_____ – это мера несоответствия между разными возможными результатами принятия определенных стратегий (действий).

Правильный ответ: Риск

Компетенции: ОПК-1, ОПК-3

Задания открытого типа с кратким свободным ответом

1. Если матричная игра с платежной матрицей $P = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 4 & 5 & -4 \\ -1 & 7 & 8 \end{pmatrix}$ имеет цену игры, равную 1,65, то чему будет равна цена матричной игры, заданной матрицей $P = \begin{pmatrix} 201 & 197 & 202 \\ 104 & 205 & 196 \\ 199 & 207 & 208 \end{pmatrix}$

Правильный ответ: Цена матричной игры равна 201,65

Компетенции: ОПК-1, ОПК-3

2. Дана матрица рисков

	P_1	P_2	P_3
A_1	3	1	0
A_2	0	6	3
A_3	9	7	0

Нужно найти номер оптимальной стратегии по критерию Сэвиджа.

Правильный ответ: номер оптимальной стратегии по критерию Сэвиджа равен 2.

Компетенции: ОПК-1, ОПК-3

3. Фирма решает, какое по размеру построить предприятие: малое, среднее или крупное. Ожидаемая прибыль зависит от будущего спроса на выпускаемую продукцию. Вероятность низкого спроса - 0.3; среднего - 0.5; высокого - 0.2. Ожидаемая прибыль (млн. руб.) представлена в таблице

Нужно определить номер оптимальной стратегии.

Альтернативы	Спрос		
	Низкий	Средний	Высокий
1. Малое предприятие	10	10	10
2. Среднее предприятие	7	12	12
3. Крупное предприятие	-4	2	16

Правильный ответ: Номер оптимальной стратегии равен 2. (Среднее предприятие).

Компетенции: ОПК-1, ОПК-3

Задания открытого типа с развернутым ответом

1. Решить матричную игру с платежной матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Привести расширенное решение.

Время выполнения – 60 мин.

Ожидаемый результат:

1. Выясним, имеет ли игра решение в чистых стратегиях. Для этого вычислим нижнюю и верхнюю цены игры в чистых стратегиях:

$$a = \max_i \min_j a_{ij} = -1; b = \min_j \max_i a_{ij} = 1.$$

$a < b$, следовательно, матрица A не имеет седловой точки, и игра не разрешима в чистых стратегиях

2. Будем искать решение игры в смешанных стратегиях. Смешанная стратегия игрока I — это вероятностный вектор:

$$x = (x_1, x_2, x_3), \text{ где } x_1 + x_2 + x_3 = 1; x_i \geq 0, i = 1, 2, 3.$$

Аналогично, смешанная стратегия игрока II — это вероятностный вектор:

$$y = (y_1, y_2, y_3), \text{ где } y_1 + y_2 + y_3 = 1; y_j \geq 0, j = 1, 2, 3.$$

3. Заметим, что каждый элемент строки 1 не меньше соответствующего элемента строки 3, то есть выигрыш игрока I при выборе им чистых стратегиях 1 не меньше его выигрыша при выборе им чистых стратегиях 3. Ясно, что разумный игрок I предпочтет стратегию 1 стратегии 3. В этом случае говорят, что чистых стратегиях 1 игрока I доминирует над его чистых стратегиях 3. Аналогично, каждый элемент столбца 2 не больше соответствующего элемента столбца 3, и чистых стратегиях 2 игрока II доминирует над его чистых стратегиях 3. Легко понять, что в оптимальные смешанных стратегиях доминируемые чистых стратегиях войдут с нулевыми вероятностями $x_3^* = 0, y_3^* = 0$. Поэтому в дальнейшем мы можем рассматривать сокращенную матрицу игры, полученную из исходной вычеркиванием третьей строки и третьего столбца:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. "Сдвиг" матрицы. Вместо матрицы $\bar{A}$ рассмотрим матрицу

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix},$$

полученную из матрицы $\bar{A}$ добавлением одного и того же числа ко всем ее элементам. Число это (в данном случае 2) выбирается так, чтобы все элементы матрицы $\tilde{A}$ стали неотрицательными. Несложно показать, что такой сдвиг платежной матрицы не приводит к изменению оптимальных смешанных

стратегий игроков. Изменяется только значение цены игры, в данном случае оно увеличивается на 2.

Смысл такого сдвига в следующем. В игре с платежной матрицей $\tilde{A}$ выигрыш игрока I в любой ситуации неотрицателен, а значит не отрицательны и все его гарантированные выигрыши, а также цена игры в смешанных стратегиях. Это дает нам право, составляя пару двойственных задач ЛП, считать переменные u, v неотрицательными.

5. Составляем пару двойственных задач ЛП для игры с платежной матрицей $\tilde{A}$:

$$\begin{cases} u \rightarrow \max \\ u - 3x_1 \leq 0, \\ u - x_1 - 4x_2 \leq 0, \\ x_1 + x_2 = 1, \\ x_1 \geq 0, \\ x_2 \geq 0, \\ u \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} v \rightarrow \min \\ y_1 \geq 0, \\ y_2 \geq 0, \\ v \geq 0, \\ v - 3y_1 - y_2 \geq 0, \\ v - 4y_2 \geq 0, \\ y_1 + y_2 = 1. \end{cases} \quad (1)$$

Прежде чем решать их, удобно сделать замену переменных $s_i = \frac{x_i}{u}$, $t_i = \frac{y_i}{v}$, $i=1,2$. Тогда задачи принимают вид:

$$\begin{cases} s_1 + s_2 \rightarrow \min \\ 3s_1 \geq 1, \\ s_1 + 4s_2 \geq 1, \\ s_1 \geq 0, \\ s_2 \geq 0, \end{cases} \quad \begin{cases} t_1 + t_2 \rightarrow \max \\ t_1 \geq 0, \\ t_2 \geq 0, \\ 3t_1 + t_2 \leq 1, \\ 4t_2 \leq 1. \end{cases} \quad (2)$$

6. Приводим вторую задачу к канонической форме (вводя дополнительные переменные t_3, t_4), и решаем ее симплекс-методом:

	t_0	t_1	t_2	t_3	t_4
f	0	-1	-1	0	0
t_3	1	3	1	1	0
t_4	1	0	4	0	1

	t_0	t_1	t_2	t_3	t_4
f	1/3	0	-2/3	1/3	0
t_3	1/3	1	1/3	1/3	0
t_4	1	0	4	0	1

	t_0	t_1	t_2	t_3	t_4
f	1/2	0	1	1/3	1/6

t_3	1/4	1	0	1/3	-1/12
t_4	1/4	0	1	0	1/4

Оптимальное решение $t^* = \left(\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right)$, $v^* = \frac{1}{t_1+t_2} = 2$. Используя вторую теорему двойственности, находим оптимальное решение двойственной задачи: $s^* = \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{6}\right)$, $u^* = \frac{1}{s_1+s_2} = 2$. Возвращаясь к исходным переменным и вспоминая, что $x_3^* = 0$, $y_3^* = 0$, получаем оптимальные смешанных стратегиях игроков: $x^* = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0\right)$, $y^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$. Цена игры в смешанных стратегиях равна 0 (с учетом сдвига матрицы).

Ответ. Оптимальные смешанных стратегиях игроков диктуют им следующие действия при многократном повторении игры: игроку I следует выбирать свою первую чистых стратегиях с вероятностью $2/3$, а вторую - с вероятностью $1/3$. Игроку II - выбирать как первую, так и вторую чистых стратегиях с вероятностью $1/2$. При этом ожидаемый средний выигрыш игрока I (и проигрыш игрока II) будет равен нулю - ничья.

Критерии оценивания:

- анализ заданной матричной игры на наличие чистых или смешанных стратегий;
- построение математической модели задачи в виде задачи линейного программирования;
- численное решение сформированной оптимизационной задачи.

Компетенции: ОПК-1, ОПК-3

2. Найти оптимальную стратегию игроков и цену матричной игры с платежной матрицей

$$H = \begin{pmatrix} 10 & 4 & 8 & 5 \\ 2 & 8 & 6 & 9 \\ 4 & 6 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

Привести расширенное решение.

Время выполнения – 60 мин.

Ожидаемый результат:

1. Данная игра не имеет ситуации равновесия в чистых стратегиях, причем

$$v_* = \max_i \min_j h_{ij} = 4 \neq v^* = 8 = \min_j \max_i h_{ij},$$

$$4 \leq v(H) \leq 8.$$

2. Проверим условия доминирования.

2.1. Найти $0 < \lambda < 1$, для которого $h^{(3)} < \lambda h^{(1)} + (1 - \lambda)h^{(2)}$, т. е. строка $h^{(3)}$ доминируется выпуклой комбинацией первых двух строк $h^{(1)}$ и $h^{(2)}$.

Последнее неравенство запишем поэлементно:

$$4 < 10\lambda + 2(1 - \lambda), \Rightarrow 2 < 8\lambda \Rightarrow \lambda > 1/4,$$

$$6 < 4\lambda + 8(1 - \lambda), \Rightarrow -2 < -4\lambda \Rightarrow \lambda < 1/2,$$

$$6 < 8\lambda + 6(1 - \lambda), \Rightarrow 0 < 2\lambda \Rightarrow \lambda > 0,$$

$$2 < 5\lambda + 9(1 - \lambda), \Rightarrow -7 < -4\lambda \Rightarrow \lambda < 7/4.$$

Тогда получим $1/4 < \lambda < 1/2$. Таким образом, строка $h^{(3)}$ доминируема, ее можно вычеркнуть, при этом $x_3^0 = 0$. Получим новую матрицу

$$H' = \begin{pmatrix} 10 & 4 & 8 & 5 \\ 2 & 8 & 6 & 9 \\ \square & \square & \square & \square \end{pmatrix}.$$

2.2. В матрице H' имеем $h_{(4)} > h_{(2)}$, т. е. $h_{(4)}$ — доминируемый столбец, его можно вычеркнуть, при этом $y_4^0 = 0$. Получим новую матрицу

$$H' \begin{pmatrix} 10 & 4 & 8 & \square \\ 2 & 8 & 6 & \square \\ \square & \square & \square & \square \end{pmatrix}$$

2.3. Найти $0 < \lambda < 1$, для которого $h_{(3)} > \lambda h_{(1)} + (1 - \lambda)h_{(2)}$:

$$\begin{cases} 8 > 10\lambda + 4(1 - \lambda), \Rightarrow 4 > 6\lambda \Rightarrow \lambda < 2/3, \\ 6 > 2\lambda + 8(1 - \lambda), \Rightarrow -2 > -6\lambda \Rightarrow \lambda > 1/3, \end{cases}$$

откуда получим $1/3 < \lambda < 2/3$, т. е. $h_{(3)}$ — доминируемый столбец, его можно вычеркнуть, при этом $y_3^0 = 0$. Получим новую матрицу

$$H' \begin{pmatrix} 10 & 4 & \square & \square \\ 2 & 8 & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \end{pmatrix}$$

3. Поиск оптимальных смешанных стратегий.

Задача для игрока 1. В соответствии с методом имеем

$$v_1^{(1)} = 10x + 2(1 - x) = 8x + 2,$$

$$v_1^{(2)} = 4x + 8(1 - x) = -4x + 8.$$

Из $v_1^{(1)} = v_1^{(2)}$ получим решение $x^0 = 1/2$, $v^0 = v_1(x^0) = 6$.

Итак, имеем оптимальную стратегию игрока 1 (с учетом $x_3^0 = 0$): $X^0 = (1/2, 1/2, 0)$. Значение игры $v(H) = v^0 = 6$.

Задача для игрока 2. В соответствии с методом имеем

$$v_2^{(1)} = 10y + 4(1 - y) = 6y + 4,$$

$$v_2^{(2)} = 2y + 8(1 - y) = -6y + 8.$$

Из $v_2^{(1)} = v_2^{(2)}$ получим решение $y^0 = 1/3$, $v^0 = v_2(y^0) = 6$.

Ответ. Таким образом, имеем оптимальную стратегию игрока 2 (с учетом $y_3^0 = 0, y_4^0 = 0$): $Y^0 = (1/3, 2/3, 0, 0)$. Значение игры $v(H) = v^0 = 6$.

Критерии оценивания:

– анализ заданной матричной игры на наличие чистых или смешанных стратегий;

– построение математической модели задачи в виде задачи линейного программирования;

– численное решение сформированной оптимизационной задачи.

Компетенции: ОПК-1, ОПК-3

3. Дать графическое изображение, привести к нормальной форме и найти решение следующей позиционной игры:

Ход 1. Первый игрок выбирает число x из множества двух чисел $\{1, 2\}$.

Ход 2. Второй игрок выбирает число y из множества двух чисел $\{1,2\}$, не зная значения x .

Ход 3. Первый игрок выбирает число z из множества двух чисел $\{1,2\}$, не зная значений ни x , ни y .

После того, как сделаны все три хода, второй игрок платит первому игроку сумму $E(x, y, z)$, заданную следующим образом:

$$\begin{aligned} E(1,1,1) &= -2, & E(1,2,1) &= 3, & E(2,1,1) &= 5, & E(2,2,1) &= 2, \\ E(1,1,2) &= -1, & E(1,2,2) &= -4, & E(2,1,2) &= 2, & E(2,2,2) &= 6. \end{aligned}$$

Привести расширенное решение.

Время выполнения – 60 мин.

Ожидаемый результат:

Построим дерево позиционной игры. Оно состоит из узлов и конечного числа направленных вверх прямолинейных отрезков, соединяющих эти узлы, каждый узел обозначается цифрой, соответствующей номеру игрока, делающего ход, и изображает ход этого игрока, поэтому каждому ходу соответствует набор узлов, расположенных на одном определенном уровне.

На самом низшем уровне имеется только один узел – основание дерева, каждый узел соединяется только с одним узлом на низшем уровне, каждый прямолинейный отрезок означает выбор, сделанный игроком на данном ходе, и обозначается номером, соответствующим сделанному выбору. Если в игре используется ход, осуществляемый не игроком, а случайным механизмом, то обычно узлу, соответствующему данному ходу, присваивается номер 0 (нуль). Вершинами дерева являются окончания прямолинейных отрезков, исходящих из узлов последнего уровня. Ветвью дерева называется ломаная линия, состоящая из прямолинейных отрезков дерева, которая начинается в самом нижнем узле и идет вверх последовательно через соответствующие узлы до вершины дерева. Каждая ветвь дерева отображает партию игры.

Для изображения необходимых сведений о сделанных выборах при определенных ходах игроков на дереве игры отмечают пунктиром так называемые информационные множества узлов определенного игрока. В каждое информационное множество входят только неразличимые для игрока узлы, т. е. только те узлы, для каждой пары из которых соответствующий игрок не может точно указать, в какой точке дерева он находится, делая этот ход.

Поскольку второму игроку не известен выбор первого игрока на первом ходе, то, выполняя свой ход, он не знает точно, в каком узле находится. Поэтому узлы второго уровня образуют информационное множество. Аналогично для первого игрока на третьем ходе, Графическое представление этой игры изображено на рис. 1.

Приведем эту игру к нормальной форме, т.е. к матричной игре. У первого игрока немного возможностей за счет недостатка информации, а именно: поскольку он на третьем ходе не знает предыдущих выборов, то его стратегия состоит из пары чисел (x, z) . т.е. выбирать $x = 1$ или $x = 2$ на первом ходе и выбирать $z = 1$ или $z = 2$ на третьем ходе. Итак. У первого игрока имеется четыре стратегии: $(1,1)$, $(1,2)$, $(2,1)$, $(2,2)$.

У второго игрока всего две стратегии: 1-я – выбрать число 1 и 2-я стратегия – выбрать число 2. Матрица выигрышей первого игрока представлена в табл. 1.

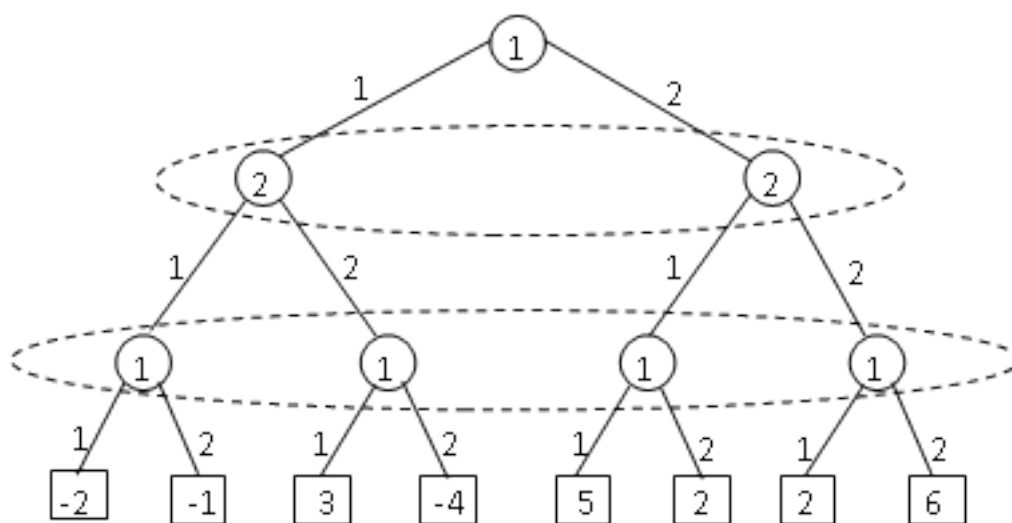


Рис. 1

Таблица 1.

1-й игрок (x, z)	2-й игрок	
	y = 1	y = 2
(1,1)	-2	3
(1,2)	-1	-4
(2,1)	5	2
(2,2)	2	6

В результате получилась игра порядка (4×2) . Известно, что игры порядка $(m \times 2)$ и $(2 \times n)$ можно решать графически.

Легко убедиться, что данная игра не имеет седловой точки в чистых стратегиях, т.к. $\max_i \min_j a_{ij} = -1$ и $\min_j \max_i a_{ij} = -2$, т.е. $v_1 \neq v_2$. Тогда необходимо найти такие смешанные стратегии $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ и $y = (y_1, y_2)$ соответственно первого и второго игроков и цену игры v , которые удовлетворяют соотношениям:

$$\begin{cases} -2y_1 + 3y_2 \leq v; \\ -y_1 - 4y_2 \leq v; \\ 5y_1 + 2y_2 \leq v; \\ 2y_1 + 6y_2 \leq v; \\ y_1 + y_2 = 1; y_1 \geq 0, y_2 \geq 0. \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} -2x_1 - x_2 + 5x_3 + 2x_4 \geq v; \\ 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 6x_4 \geq v; \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1; x_j \geq 0, j = 1, \dots, 4. \end{cases} \quad (2)$$

Необходимо определить смешанные стратегии $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ и $y = (y_1, y_2)$ соответственно первого и второго игроков. Данную задачу можно решить графически относительно стратегий второго игрока y_1 и y_2 , используя соотношения (1). Пусть по горизонтальной оси откладывается значение y_1 от 0 до 1, по вертикальной – значение среднего выигрыша $E_i(y_1)$ первого игрока при условии, что он применяет свою чистую i -ю стратегию ($i = 1, 2, 3, 4$), второй – свою смешанную стратегию $(y_1, 1 - y_1) = y$. Используя соотношения (1), получим уравнения средних выигрышей второго игрока:

$$\begin{cases} E_1(y_1) = (-2 - 3)y_1 + 2 = -5y_1 + 2; \\ E_2(y_1) = (-1 + 4)y_1 - 4 = 3y_1 - 4; \\ E_3(y_1) = (5 - 2)y_1 + 2 = 3y_1 + 2; \\ E_4(y_1) = (2 - 6)y_1 + 6 = -4y_1 + 6; \\ y_1 = 1 - y_2. \end{cases} \quad (3)$$

Графически $E_i(y_1)$ могут быть представлены так, как изображено на рис. 2. Первый игрок старается максимизировать свой выигрыш, поэтому он стремится найти

$$\max_i E_i(y_1) = E(y_1).$$

На рис. 2 функция $E(y_1)$ изображена жирной линией и представляет собой верхнюю границу множества ограничений. Второй игрок старается минимизировать $E(y_1)$ за счет выбора своей стратегии y_1 , т.е. величина y_1 соответствует

$$\min_{y_1} E(y_1) = E(y_1^0) = v.$$

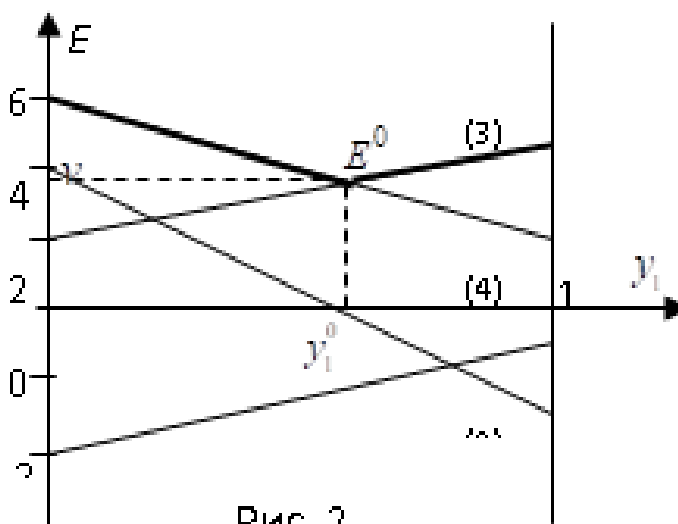


Рис. 2.

На рис. 2 значение $E(y_1^0)$ обозначено точкой E^0 . Другими словами, определяются такие две стратегии первого игрока и вероятность y_1 для второго игрока, при которых достигается равенство

$$\min_{y_1} \max_i [(a_{i1} - a_{i2})y_1 + a_{i2}] = v,$$

или, как видно из рис. 2 точку E^0 образуют третья и четвертая стратегии первого игрока. Следовательно, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ и для определения y_1 и v надо составить уравнения, соответствующие этим стратегиям:

$$\begin{cases} E_3(y_1) = 3y_1 + 2 = v; \\ E_4(y_1) = 4y_1 + 6 = v; \\ y_2 = 1 - y_1. \end{cases}$$

Решение этих уравнений: $y_1 = \frac{4}{7}$; $y_2 = \frac{3}{7}$; $v = \frac{26}{7}$.

Для определения x_3 и x_4 следует решить первое и третье уравнения системы (2)

$$5x_3 + 2x_4 = v; x_3 + x_4 = 1; v = \frac{26}{7},$$

или второе и третье уравнения системы (2)

$$2x_3 + 6x_4 = v; x_3 + x_4 = 1; v = \frac{26}{7}.$$

В результате решения получим стратегию первого игрока:

$$x_1 = 0; x_2 = 0; x_3 = \frac{4}{7}; x_4 = \frac{3}{7}; v = \frac{26}{7}.$$

Ответ. Стратегия первого игрока $x_1 = 0$; $x_2 = 0$; $x_3 = \frac{4}{7}$; $x_4 = \frac{3}{7}$; $v = \frac{26}{7}$

Критерии оценивания:

- построение дерева заданной позиционной игры.
 - анализ логики действия игроков и формирование математической модели задачи;
 - численное решение сформированной оптимизационной задачи
- геометрическая интерпретация оптимального действия игроков.

Компетенции: ОПК-1, ОПК-3

4. Решить следующую биматричную игру:

Министерство планирует наладить выпуск одного из двух продукции на территории города. Городские власти могут принять предложение министерства или отказать. Министерство – первый игрок – имеет две стратегии: выпуск 1-ого вида продукции, выпуск 2-ого вида продукции. Город – второй игрок – имеет две стратегии: принять предложение министерства или отказать. Свои действия (стратегии) они применяют независимо друг от друга, и результаты определяются прибылью (выигрышем) согласно следующим матрицам:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Определить оптимальные стратегии игроков и их оптимальные средние выигрыши.

Привести расширенное решение.

Время выполнения – 30 мин.

Решение.

Некоторые пояснения к элементам выигрышей матриц A и B могут быть, например, такие: если игроки применяют свои первые стратегии, министерство принимает решение о выпуске первого вида продукции, а городские власти

разрешают ее выпуск, тогда город получает выигрыш 5 млн. руб., а министерство теряет 10 млн. руб., аналогично объясняются остальные выигрыши.

Для этой игры имеем:

$$a_1 = a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22} = -10 - 2 - 1 - 1 = -14,$$

$$a_2 = a_{22} - a_{12} = -1 - 2 = -3, \quad \alpha = \frac{-3}{-14} = \frac{3}{14}.$$

Поскольку $a_1 < 0$, то множество решений K имеет следующий вид:

$$(0, y_1), \text{ где } \frac{3}{14} \leq y_1 \leq 1; \quad (x_1, \frac{3}{14}), \text{ где } 0 \leq x_1 \leq 1;$$

$$(1, y_1), \text{ где } 0 \leq y_1 \leq \frac{3}{14}.$$

Множество K ситуаций, применяемых для первого игрока, изображено на рис. 3 жирной линией.

Для второго игрока имеем:

$$b_1 = b_{11} - b_{12} - b_{21} + ab = 5 + 2 + 1 + 1 = 9,$$

$$b_2 = b_{22} - b_{12} = 1 + 1 = 2, \quad \beta = \frac{2}{9}.$$

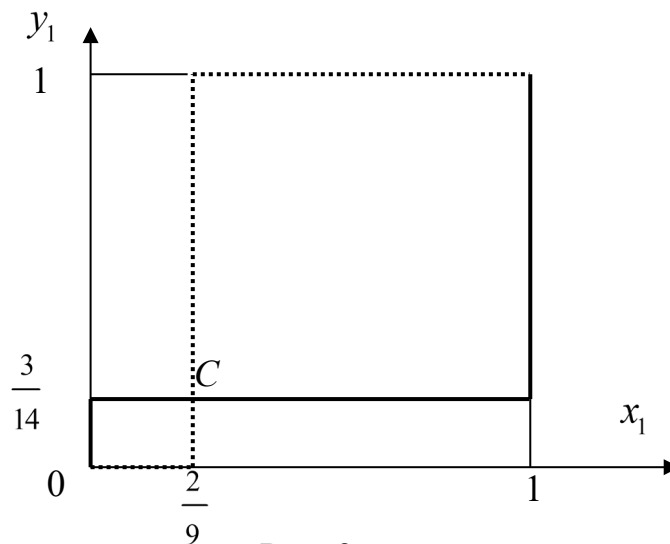


Рис. 3.

Поскольку $b_1 > 0$, то множество решений L имеет следующий вид:

$$(x_1, 0), \text{ где } 0 \leq x_1 \leq \frac{2}{9};$$

$$\left(\frac{2}{9}, y_1\right), \text{ где } 0 \leq y_1 \leq 1;$$

$$(x_1, 1), \text{ где } \frac{2}{9} \leq x_1 \leq 1.$$

Множество L ситуаций, приемлемых для второго игрока изображено на рис. 3 пунктирной линией.

Точка пересечения множеств L и K есть точка C с координатами $x_1 = \frac{2}{9}$, $y_1 = \frac{3}{14}$ и представляет соответственно приемлемые стратегии (ситуацию равновесия) министерства и города.

При этом их выигрыш соответственно равен

$$E_1(A, x, y) = -10 \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{3}{14} + 2 \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{11}{14} + 1 \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{3}{14} - 1 \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{11}{14} = -\frac{4}{7};$$

$$E_2(B, x, y) = 5 \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{3}{14} - 2 \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{11}{14} - 1 \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{3}{14} + 1 \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{11}{14} = \frac{1}{3}.$$

Ответ. Для получения оптимального среднего выигрыша (проигрыша) каждый из игроков должен применить следующие стратегии $x = \left(\frac{2}{9}, \frac{7}{9}\right)$ и $y = \left(\frac{3}{14}, \frac{11}{14}\right)$ соответственно.

Критерии оценивания:

- формализация исходных данных и построение соответствующей математической модели задачи.
- геометрическая интерпретация возможных ситуаций поэтапного решения
- численное решение сформированной задачи и геометрическая интерпретация оптимального действия игроков.

Компетенции: ОПК-1, ОПК-3

Экспертное заключение

Представленный комплект оценочных материалов по дисциплине «Теория игр и ее приложения» соответствует требованиям ФГОС ВО.

Предлагаемые оценочные материалы адекватны целям и задачам реализации основной профессиональной образовательной программы по направлению подготовки 01.04.02 Прикладная математика и информатика.

Виды оценочных средств, включенные в представленный фонд, отвечают основным принципам формирования ФОС.

Разработанные и представленные для экспертизы оценочные материалы рекомендуются к использованию в процессе подготовки обучающихся по указанному направлению.

Председатель учебно-методической комиссии
института компьютерных систем и
информационных технологий

Ветрова Н. Н.

Лист изменений и дополнений

№ п/п	Виды дополнений и изменений	Дата и номер протокола заседания кафедры (кафедр), на котором были рассмотрены и одобрены изменения и дополнения	Подпись (с расшифровкой) заведующего кафедрой (заведующих кафедрами)
1.	Дополнен комплектом оценочных материалов	протокол заседания кафедры прикладной математики № <u>8</u> от <u>24.02.2025</u>	 В.В. Малый