

**Комплект оценочных материалов по дисциплине
«Математический анализ»**

Задания закрытого типа

Задания закрытого типа на выбор правильного ответа

1. Выберите один правильный ответ

Вычислить $|1 - \sqrt{2}| + |\sqrt{2} - 3| + 4$.

А) 2

Б) $2\sqrt{2}$

В) 6

Г) $-2\sqrt{2}$

Правильный ответ: В

Компетенции (индикаторы): ОПК-1 (ОПК-1.1, ОПК-1.2)

2. Выберите один правильный ответ

Для функции $f(x) = 3x^2 - 2x - 1$ найти $f(-1) + f'(1)$.

А) 8

Б) 4

В) 0

Г) 1

Правильный ответ: А

Компетенции (индикаторы): ОПК-1 (ОПК-1.1, ОПК-1.2)

3. Выберите один правильный ответ

Найти предел числовой последовательности $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^2 + 5}{3n^2 - 3n + 7}$

А) ∞

Б) 0

В) 2

Г) $\frac{5}{7}$

Правильный ответ: В

Компетенции (индикаторы): ОПК-1 (ОПК-1.1, ОПК-1.2)

4. Выберите один правильный ответ

Даны функции $f(x) = \sin x$, $g(x) = \sqrt{x}$. Найти значение их композиции:

$$g\left(f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

А) $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$

Б) $1 + \sqrt{\frac{\pi}{2}}$

В) 0

Г) 1

Правильный ответ: Г

Компетенции (индикаторы): ОПК-1 (ОПК-1.1, ОПК-1.2)

5. Выберите один правильный ответ

Какой из неопределенных интегралов дает в результате $2 \arctg x + C$?

А) $\int \frac{2 dx}{2x-1}$

Б) $\int \frac{x dx}{x^2-1}$

В) $\int \frac{dx}{x^2-1}$

Г) $\int \frac{2 dx}{x^2+1}$

Правильный ответ: Г

Компетенции (индикаторы): ОПК-1 (ОПК-1.1, ОПК-1.2)

6. Выберите один правильный ответ

Неопределенный интеграл $\int x^3 dx$ равен:

А) $\frac{x^2}{2} + C$

Б) $3x^2 + C$

В) $\frac{x^3}{3} + C$

Г) $\frac{x^4}{4} + C$

Правильный ответ: Г

Компетенции (индикаторы): ОПК-1 (ОПК-1.1, ОПК-1.2)

7. Выберите один правильный ответ

Неопределенный интеграл $\int 5^x dx$ равен:

А) $5^x \cdot \ln 5 + C$

Б) $\frac{x^5}{5} + C$

В) $\frac{5^x}{\ln 5} + C$

Г) $x \cdot 5^x + C$

Правильный ответ: В

Компетенции (индикаторы): ОПК-1 (ОПК-1.1, ОПК-1.2)

8. Выберите один правильный ответ

Неопределенный интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ равен:

А) $\arcsin \frac{x}{a} + C$

Б) $\arccos \frac{a}{x} + C$

$$\text{В)} -\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}} + C$$

$$\text{Г)} \arcsin \frac{a}{x} + C$$

Правильный ответ: А

Компетенции (индикаторы): ОПК-1 (ОПК-1.1, ОПК-1.2)

Задания закрытого типа на установление соответствия

1. Установите правильное соответствие. Каждому элементу левого столбца соответствует только один элемент правого столбца.

	Функция $y(x)$		Производная $y'(x)$
1)	$y = 2 \arctg x$	А)	$y' = -\frac{2}{1+4x^2}$
2)	$y = \operatorname{arcc}tg 2x$	Б)	$y' = \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$
3)	$y = \arcsin(-2x)$	В)	$y' = -\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$
4)	$y = \arccos(-2x)$	Г)	$y' = \frac{2}{1+x^2}$

Правильный ответ:

1	2	3	4
Г	А	В	Б

Компетенции (индикаторы): ОПК-1 (ОПК-1.1, ОПК-1.2)

2. Установите правильное соответствие. Каждому элементу левого столбца соответствует только один элемент правого столбца.

	Простейшее неравенство с модулем		Способы решения
1)	$ x < 5$	А)	$\begin{cases} x \geq 5 \\ x \leq -5 \end{cases}$
2)	$ x > 5$	Б)	$\begin{cases} x \geq -5 \\ x \leq 5 \end{cases}$
3)	$ x \leq 5$	В)	$\begin{cases} x > 5 \\ x < -5 \end{cases}$
4)	$ x \geq 5$	Г)	$\begin{cases} x > -5 \\ x < 5 \end{cases}$

Правильный ответ:

1	2	3	4
Г	В	Б	А

Компетенции (индикаторы): ОПК-1 (ОПК-1.1, ОПК-1.2)

3. Установите правильное соответствие. Каждому элементу левого столбца соответствует только один элемент правого столбца.

Даны множества $A = (0; 2)$, $B = [1; 3]$.

	Операции над множествами А и В		Результат
1)	$A \cup B$	А)	$[2; 3]$
2)	$A \cap B$	Б)	$(0; 3]$
3)	$A \setminus B$	В)	$(0; 1)$
4)	$B \setminus A$	Г)	$[1; 2)$

Правильный ответ:

1	2	3	4
Б	Г	В	А

Компетенции (индикаторы): ОПК-1 (ОПК-1.1, ОПК-1.2)

4. Установите правильное соответствие. Каждому элементу левого столбца соответствует только один элемент правого столбца.

	Неопределенный интеграл		Значение
1)	$\int \frac{dx}{\sqrt{3-x^2}}$	А)	$\frac{1}{\sqrt{3}} \arctg \frac{x}{\sqrt{3}} + C$
2)	$\int \frac{dx}{3+x^2}$	Б)	$\frac{1}{2\sqrt{3}} \ln \left \frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}} \right + C$
3)	$\int \frac{dx}{x^2-3}$	В)	$\ln x + \sqrt{x^2+3} + C$
4)	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3}}$	Г)	$\arcsin \frac{x}{\sqrt{3}} + C$

Правильный ответ:

1	2	3	4
Г	А	Б	В

Компетенции (индикаторы): ОПК-1 (ОПК-1.1, ОПК-1.2)

5. Установите правильное соответствие. Каждому элементу левого столбца соответствует только один элемент правого столбца.

	Свойства определенного интеграла		Формулы
1)	Теорема о среднем значении определенного интеграла	А)	$\int_a^b \lambda f(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx$
2)	Аддитивность определенного интеграла	Б)	$\int_a^b (f(x) \pm g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$
3)	Однородность определенного интеграла	В)	$\int_a^b f(x) dx = f(C)(b-a)$
4)	Формула Ньютона-Лейбница	Г)	$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$

Правильный ответ:

1	2	3	4
В	Б	А	Г

Компетенции (индикаторы): ОПК-1 (ОПК-1.1, ОПК-1.2)

6. Установите правильное соответствие. Каждому элементу левого столбца соответствует только один элемент правого столбца.

	Определенный интеграл		Значение
1)	$\int_1^e \frac{dx}{x}$	А)	1
2)	$\int_0^2 4 dx$	Б)	$e - 1$
3)	$\int_0^1 e^x dx$	В)	8
4)	$\int_0^{\pi/4} \frac{2 dx}{\cos^2 x}$	Г)	2

Правильный ответ:

1	2	3	4
А	В	Б	Г

Компетенции (индикаторы): ОПК-1 (ОПК-1.1, ОПК-1.2)

7. Установите правильное соответствие. Каждому элементу левого столбца соответствует только один элемент правого столбца.

	Ряд		Название
1)	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$	А)	степенной ряд
2)	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$	Б)	гармонический ряд
3)	$\sum_{n=1}^{\infty} (\sin nx + \cos nx)$	В)	тригонометрический ряд
4)	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$	Г)	знакопеременный ряд

Правильный ответ:

1	2	3	4
Б	А	В	Г

Компетенции (индикаторы): ОПК-1 (ОПК-1.1, ОПК-1.2)

8. Установите правильное соответствие. Каждому элементу левого столбца соответствует только один элемент правого столбца.

	Функция		Разложение в ряд Маклорена
1)	e^x	А)	$1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$
2)	$\cos x$	Б)	$\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots$
3)	$\sin x$	В)	$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$
4)	$\frac{1}{1-x}$	Г)	$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \dots$

Правильный ответ:

1	2	3	4
В	Г	Б	А

Компетенции (индикаторы): ОПК-1 (ОПК-1.1, ОПК-1.2)

Задания закрытого типа на установление правильной последовательности

1. Расположить значения $y'(x_0)$ производных функций в точке x_0 в порядке возрастания их величин:

А) $y = 4 + \ln x, x_0 = \frac{1}{2}$

Б) $y = 10 - 3x - 2x^2, x_0 = -1$

В) $y = (x + 3) \cdot \operatorname{tg} x, x_0 = 0$

Г) $y = \sqrt{1+x}, x_0 = 0$

Правильный ответ: Г, Б, А, В

Компетенции (индикаторы): ОПК-1 (ОПК-1.1, ОПК-1.2)

2. Расположите пределы в порядке убывания их значений:

А) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 4}{x^2 - x - 2}$

Б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$

В) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x}\right)^x$

Г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 + x + 1}{10x^4 - x - 2}$

Правильный ответ: Г, В, А, Б

Компетенции (индикаторы): ОПК-1 (ОПК-1.1, ОПК-1.2)

3. Расположите определенные интегралы в порядке возрастания их значений:

А) $\int_0^1 x^2 dx$

Б) $\int_0^1 \frac{4}{1+x^2} dx$

В) $\int_0^1 dx$

Г) $\int_0^1 3e^x dx$

Правильный ответ: А, В, Б, Г

Компетенции (индикаторы): ОПК-1 (ОПК-1.1, ОПК-1.2)

4. Расположить простые рациональные дроби в правильной последовательности, соответствующей их названиям.

А) $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$

Б) $\frac{A}{(x-a)^k}$, $k = 2, 3, \dots$

В) $\frac{A}{x-a}$

Г) $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}$, $m = 2, 3, \dots$

Правильный ответ: В, Б, А, Г

Компетенции (индикаторы): ОПК-1 (ОПК-1.1, ОПК-1.2)

8. Расположите значения функции $z(x_0 = 1; y_0 = 1)$ в порядке убывания:

А) $z(x; y) = 2x + 3y^2$

Б) $z(x; y) = \ln(xy) + 2$

В) $z(x; y) = \ln x + \ln y + 1$

Г) $z(x; y) = y \cdot \sin(\pi x)$

Правильный ответ: А, Б, В, Г

Компетенции (индикаторы): ОПК-1 (ОПК-1.1, ОПК-1.2)

6. Расположите интегралы в порядке убывания их значений:

А) $\int_0^1 dx \int_0^1 dy$

Б) $\int_0^1 dx \int_0^x dy$

В) $\int_0^1 dx \int_0^{x^2} dy$

Г) $\int_0^1 dx \int_{-1}^1 dy$

Правильный ответ: Г, А, Б, В

Компетенции (индикаторы): ОПК-1 (ОПК-1.1, ОПК-1.2)

Задания открытого типа

Задания открытого типа на дополнение

1. Напишите пропущенное слово (словосочетание).

Закончить формулировку определения. Ответ дать в именительном падеже.

Пусть x_0 – точка разрыва для функции f , определенной в окрестности

$U^*(x_0)$, тогда если существуют конечные левый и правый пределы $f(x_0 -)$, $f(x_0 +)$ для функции f при $x \rightarrow x_0$, то точка x_0 называется _____.

Правильный ответ: точка разрыва первого рода.

Компетенции (индикаторы): ОПК-1 (ОПК-1.1, ОПК-1.2)

2. Напишите пропущенное слово (словосочетание).

_____ – предел отношения приращения функции к приращению её аргумента при стремлении приращения аргумента к нулю (при условии, что такой предел существует).

Правильный ответ: производная; производная функции.

Компетенции (индикаторы): ОПК-1 (ОПК-1.1, ОПК-1.2)

3. Напишите пропущенное слово (словосочетание).

_____ для функции $f(x)$ – это такая функция, производная которой равна $f(x)$.

Правильный ответ: первообразная.

Компетенции (индикаторы): ОПК-1 (ОПК-1.1, ОПК-1.2)

4. Напишите пропущенное слово (словосочетание).

Интеграл называется _____, если выполняется по крайней мере одно из следующих условий: 1) область интегрирования является бесконечной; 2) подынтегральная функция является неограниченной в окрестности некоторых точек области интегрирования.

Правильный ответ: несобственным.

Компетенции (индикаторы): ОПК-1 (ОПК-1.1, ОПК-1.2)

5. Напишите пропущенное слово (словосочетание).

Плоская фигура, ограниченная сверху графиком неотрицательной функции $y = f(x)$, снизу – прямой $y = 0$, слева и справа – соответственно прямыми $x = a$ и $x = b$, – это _____.

Правильный ответ: криволинейная трапеция.

Компетенции (индикаторы): ОПК-1 (ОПК-1.1, ОПК-1.2)

6. Напишите пропущенное слово (словосочетание).

Геометрический смысл двойного интеграла заключается в том, что величина двойного интеграла от неотрицательной функции равна _____ цилиндрического тела.

Правильный ответ: объёму.

Компетенции (индикаторы): ОПК-1 (ОПК-1.1, ОПК-1.2)

7. Напишите пропущенное слово (словосочетание).

Закончить формулировку теоремы Лейбница.

Если модуль общего члена знакопеременующегося числового ряда стремится к нулю, убывая, то этот ряд _____

Правильный ответ: сходится.

Компетенции (индикаторы): ОПК-1 (ОПК-1.1, ОПК-1.2)

8. Напишите пропущенное слово (словосочетание).

_____ функции f в точке M_0 – это вектор, координатами которого являются значения частных производных в этой точке.

Правильный ответ: градиент.

Компетенции (индикаторы): ОПК-1 (ОПК-1.1, ОПК-1.2)

Задания открытого типа с кратким свободным ответом

1. Производная функция $y(x) = \cos(x^2)$ равна ... *(Ответ запишите в виде функции)*

Правильный ответ: $-2x \sin x^2$.

Компетенции (индикаторы): ОПК-1 (ОПК-1.1, ОПК-1.2)

2. Найти промежуток возрастания функции $y(x) = 1 - x^2$ *(Ответ запишите в виде интервала)*

Правильный ответ: $(-\infty; 0)$.

Компетенции (индикаторы): ОПК-1 (ОПК-1.1, ОПК-1.2)

3. Точка движется прямолинейно по закону $s = \frac{4}{3}t^3 - t + 5$ (м). Найти скорость материальной точки в момент времени $t = 2$ (с). *(Ответ запишите в виде числа)*

Правильный ответ: 15.

Компетенции (индикаторы): ОПК-1 (ОПК-1.1, ОПК-1.2)

4. Найти наибольшее значение функции $y(x) = x^2 - 2x - 1$ на отрезке $[-1; 1]$ *(Ответ запишите в виде числа)*

Правильный ответ: 2.

Компетенции (индикаторы): ОПК-1 (ОПК-1.1, ОПК-1.2)

5. Найти сумму абсцисс точек разрыва функции:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x < 0 \\ \cos x, & 0 \leq x \leq 1 \\ x^2 - 1, & x > 1 \end{cases}$$

(Ответ запишите в виде числа)

Правильный ответ: 1.

Компетенции (индикаторы): ОПК-1 (ОПК-1.1, ОПК-1.2)

6. Найти промежуток, на котором график функции $y = 3x^2 - x^3$ выпуклый вниз? *(Ответ запишите в виде промежутка)*

Правильный ответ: $(-\infty; 1)$.

Компетенции (индикаторы): ОПК-1 (ОПК-1.1, ОПК-1.2)

7. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 0$; $y = 2x$; $x = 1$
(Ответ запишите в виде числа)

Правильный ответ: 1.

Компетенции (индикаторы): ОПК-1 (ОПК-1.1, ОПК-1.2)

8. Скорость тела определяется формулой $v(t) = \sqrt{1+t}$ (м/с). Найти путь, пройденный телом за промежуток времени от $t_1 = 0$ (с) до $t_2 = 8$ (с). (Ответ запишите в виде рационального числа)

Правильный ответ: $\frac{52}{3}$

Компетенции (индикаторы): ОПК-1 (ОПК-1.1, ОПК-1.2)

9. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями $y = 2\sqrt{x}$, $0 \leq x \leq 2$, $y > 0$. (Ответ запишите в виде числа)

Правильный ответ: 8π .

Компетенции (индикаторы): ОПК-1 (ОПК-1.1, ОПК-1.2)

10. Установить сходимость или расходимость несобственного интеграла первого рода $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$ (Ответ записать одним словом)

Правильный ответ: сходится.

Компетенции (индикаторы): ОПК-1 (ОПК-1.1, ОПК-1.2)

11. Установить сходимость или расходимость несобственного интеграла второго рода $\int_0^2 \frac{dx}{x\sqrt{x}}$? (Ответ записать одним словом)

Правильный ответ: расходится.

Компетенции (индикаторы): ОПК-1 (ОПК-1.1, ОПК-1.2)

12. Вычислить определенный интеграл $\int_0^1 \arccos x \, dx$. (Ответ запишите в виде числа)

Правильный ответ: 1.

Компетенции (индикаторы): ОПК-1 (ОПК-1.1, ОПК-1.2)

Задания открытого типа с развернутым ответом

1. Решить задачу, используя методы интегрального исчисления:

Цилиндрический резервуар с высотой 6 м и диаметром основания 4 м наполнен водой. За какое время вода вытечет из него через круглое отверстие радиуса $1/12$ м, сделанное в дне резервуара?

(Справочная информация: скорость истечения жидкости по закону Бернулли выражается формулой $V = \sigma\sqrt{2gx}$, причем для воды $\sigma \approx 0,6$).

Привести расширенное решение.

Время выполнения – 30 мин.

Ожидаемый результат:

1. Пусть через t сек после истечения воды уровень оставшейся воды в резервуаре был равен x м, а за время dt сек понизился на dx м. вычислим объем воды, вытекающий за этот бесконечно малый промежуток времени dt , двумя способами:

1 сп.) Объем dW равен объему цилиндрического слоя высотой dx и радиусом основания $r = 2$ м.

$$dW = \pi r^2 dx$$

2 сп.) Объем dW равен объему цилиндра, основанием которого служит отверстие в дне резервуара $\rho = 1/12$ м, а высота равна Vdt , где V – скорость течения воды:

$$dW = \pi \rho^2 V dt = 0,6\pi \rho^2 \sqrt{2gx} dt$$

Приравниваем полученные выражения:

$$\pi r^2 dx = 0,6\pi \rho^2 \sqrt{2gx} dt$$

Получаем:

$$dt = \frac{r^2 dx}{0,6\rho^2 \sqrt{2gx}}, \quad \text{где } x \in [0; 6]$$

2. Интегрируем уравнение, получаем время истечения воды:

$$t = \int_0^6 \frac{r^2 dx}{0,6\rho^2 \sqrt{2gx}} = \frac{r^2 dx}{0,6\rho^2 \sqrt{2g}} \int_0^6 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{r^2 dx}{0,6\rho^2 \sqrt{2g}} \cdot 2\sqrt{x} \Big|_0^6 = \frac{10}{\sqrt{3g}} \cdot \frac{r^2}{\rho^2}$$

3. Подставляем исходные данные, получаем:

$$t \approx 1062 \text{ сек} = 17,7 \text{ мин}$$

Ответ: вода вытечет из резервуара через $t \approx 1062$ сек = 17,7 мин.

Критерии оценивания:

- построение математической модели процесса истечения воды из резервуара;
- интегрирование полученного уравнения;
- нахождение времени вытекания воды из резервуара через круглое отверстие, сделанное в дне резервуара.

Компетенции (индикаторы): ОПК-1 (ОПК-1.1, ОПК-1.2)

2. Решить задачу, используя методы интегрального исчисления:

Найти массу m пластины, которая ограничена кривыми:

$$x = 2, y = 0, y^2 = \frac{x}{2}, \quad (y \geq 0)$$

и имеет поверхностную плотность, определяемую функцией $\rho(x, y) = \frac{7}{2}x^2 + 6y$.

Привести расширенное решение.

Время выполнения – 25 мин.

Ожидаемый результат:

Задача может быть решена с использованием двойного интеграла, а именно:

$$m = \iint_D \rho(x, y) \, dx dy$$

Область D (плоская пластина) – это фигура, ограниченная прямыми $x = 2, y = 0$ и параболой $y^2 = \frac{x}{2}, y \geq 0$. Тогда масса m равна:

$$m = \iint_D \rho(x, y) \, dx dy = \iint_D \left(\frac{7}{2}x^2 + 6y \right) \, dx dy$$

Переходя к повторному интегрированию, внешнее интегрирование проведем по переменной y . Тогда $0 \leq y \leq 1, 2y^2 \leq x \leq 2$.

$$\begin{aligned} m &= \int_0^1 dy \int_{2y^2}^2 \left(\frac{7}{2}x^2 + 6y \right) dx = \int_0^1 \left(\frac{7}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + 6y \cdot x \right) \Big|_{2y^2}^2 dy = \\ &= \int_0^1 \left(\frac{28}{3} - \frac{28}{3}y^6 + 12y - 12y^3 \right) dy = \frac{28}{3} - \frac{4}{3} + 6 - 3 = 11 \text{ (ед. массы)} \end{aligned}$$

Ответ: масса пластины равна 11 (ед. массы).

Критерии оценивания:

- использование прикладных возможностей двойного интеграла;
- вычисление двойного интеграла повторным интегрированием (возможен чертеж области интегрирования);
- нахождение величины массы.

Компетенции (индикаторы): ОПК-1 (ОПК-1.1, ОПК-1.2)

Экспертное заключение

Представленный комплект оценочных материалов по дисциплине «Математический анализ» соответствует требованиям ФГОС ВО.

Предлагаемые оценочные материалы адекватны целям и задачам реализации основной профессиональной образовательной программы по направлению подготовки 03.03.02 Физика.

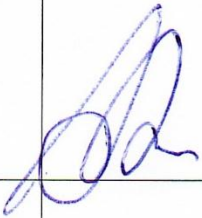
Виды оценочных средств, включенные в представленный фонд, отвечают основным принципам формирования ФОС.

Разработанные и представленные для экспертизы оценочные материалы рекомендуются к использованию в процессе подготовки обучающихся по указанному направлению.

Председатель учебно-методической комиссии
института компьютерных систем и
информационных технологий

Ветрова Н. Н.

Лист изменений и дополнений

№ п/п	Виды дополнений и изменений	Дата и номер протокола заседания кафедры (кафедр), на котором были рассмотрены и одобрены изменения и дополнения	Подпись (с расшифровкой) заведующего кафедрой (заведующих кафедрами)
1.	Дополнен комплектом оценочных материалов	протокол заседания кафедры прикладной математики № <u>8</u> от <u>24.02.2025</u>	 В.В. Малый