

**Комплект оценочных материалов по дисциплине
«Дифференциальные уравнения»**

Задания закрытого типа

Задания закрытого типа на выбор правильного ответа

1. Выберите один правильный ответ

Если в дифференциальном уравнении неизвестная функция зависит только от одной переменной, то дифференциальное уравнение называется:

А) в частных производных

Б) необычным

В) обычным

Г) обыкновенным

Правильный ответ: Г

Компетенции (индикаторы): ОПК-1 (ОПК-1.1, ОПК-1.2)

2. Выберите один правильный ответ

Определить порядок дифференциального уравнения:

$$(y'')^2 + (y')^5 = \sin x$$

А) 1

Б) 2

В) 5

Г) 7

Правильный ответ: Б

Компетенции (индикаторы): ОПК-1 (ОПК-1.1, ОПК-1.2)

3. Выберите один правильный ответ

Решить дифференциальное уравнение:

$$y' = x^2 + 3$$

А) $y = \frac{x^3}{3} + 3x + c$

Б) $y = x^3 + 3x + c$

В) $y = 2x + 3 + c$

Г) $y = \frac{x^2}{2} + 2x + c$

Правильный ответ: А

Компетенции (индикаторы): ОПК-1 (ОПК-1.1, ОПК-1.2)

4. Выберите один правильный ответ

Решить задачу Коши при заданных начальных условиях $y(0) = 1$ для дифференциального уравнения:

$$2y' = \sin x$$

А) $y = -\cos x + 1,5$

Б) $y = 2\cos x + 1,5$

В) $y = \frac{1}{2}\cos x + 1,5$

Г) $y = -\frac{1}{2}\cos x + 1,5$

Правильный ответ: Г

Компетенции (индикаторы): ОПК-1 (ОПК-1.1, ОПК-1.2)

5. Выберите один правильный ответ

Дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ называется однородным, если функция $f(x, y)$ является однородной измерения:

А) 0

Б) 1

В) 2

Г) 3

Правильный ответ: А

Компетенции (индикаторы): ОПК-1 (ОПК-1.1, ОПК-1.2)

Задания закрытого типа на установление соответствия

1. Установите правильное соответствие. Каждому элементу левого столбца соответствует только один элемент правого столбца.

	Дифференциальное уравнение		Решение дифференциального уравнения
1)	$y' = x$	А)	$y = x + c$
2)	$y' = x^3 - 1$	Б)	$y = \frac{x^4}{4} - x + c$
3)	$dy = dx$	В)	$y = \frac{x^3}{3} + c$
4)	$dy = x^2 \cdot dx$	Г)	$y = \frac{x^2}{2} + c$

Правильный ответ:

1	2	3	4
Г	Б	А	В

Компетенции (индикаторы): ОПК-1 (ОПК-1.1, ОПК-1.2)

2. Установите правильное соответствие. Каждому элементу левого столбца соответствует только один элемент правого столбца.

	Дифференциальное уравнение первого порядка		Вид дифференциального уравнения первого порядка
1)	$y' + \ln x \cdot y = x^5$	А)	Обыкновенное дифференциальное уравнение

			первого порядка с разделяющимися переменными
2)	$x \cdot dy = \cos y \cdot dx$	Б)	Линейное обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка
3)	$(2xy - 5)dx + (3y^2 + x^2)dy$	В)	Дифференциальное уравнение в частных производных
4)	$3 \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 5$	Г)	Обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка в полных дифференциалах

Правильный ответ:

1	2	3	4
Б	А	Г	В

Компетенции (индикаторы): ОПК-1 (ОПК-1.1, ОПК-1.2)

3. Установите правильное соответствие. Каждому элементу левого столбца соответствует только один элемент правого столбца.

	Результат интегрирования дифференциального уравнения		Наименование результата интегрирования дифференциального уравнения
1)	$y = x + c$	А)	Общий интеграл
2)	$\frac{1}{x} \cdot y - 5 \sin y = 0$	Б)	Частный интеграл
3)	$y = \frac{x^5}{5} - 7$	В)	Общее решение
4)	$y \cdot \cos y \cdot x + cx = 0$	Г)	Частное решение

Правильный ответ:

1	2	3	4
В	Б	Г	А

Компетенции (индикаторы): ОПК-1 (ОПК-1.1, ОПК-1.2)

4. Установите правильное соответствие. Каждому элементу левого столбца соответствует только один элемент правого столбца.

	Дифференциальное уравнение высшего порядка		Вид дифференциального уравнения высшего порядка
1)	$y^{(n)} + p_1(x) \cdot y^{(n-1)} + p_2(x) \cdot y^{(n-2)} + \dots + p_{n-1}(x) \cdot y' + p_n(x) \cdot y = f(x)$	А)	Дифференциальное уравнение, которое не содержит в явном виде искомую функцию и ее производные до порядка $k - 1$ включительно

2)	$y^{(n)} + p_1(x) \cdot y^{(n-1)} + p_2(x) \cdot y^{(n-2)} + \dots + p_{n-1}(x) \cdot y' + p_n(x) \cdot y = 0$	Б)	Дифференциальное уравнение, которое не содержит в явном виде переменную x
3)	$F(y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$	В)	Линейное однородное дифференциальное уравнение порядка n
4)	$F(x, y^{(k)}, \dots, y^{(n)}) = 0$	Г)	Линейное неоднородное дифференциальное уравнение порядка n

Правильный ответ:

1	2	3	4
Г	В	Б	А

Компетенции (индикаторы): ОПК-1 (ОПК-1.1, ОПК-1.2)

5. Установите правильное соответствие. Каждому элементу левого столбца соответствует только один элемент правого столбца.

	Линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами		Соответствующее характеристическое уравнение
1)	$y'' - 5y' + 6 = 0$	А)	$k^2 - 5k + 6 = 0$
2)	$2y'' + 10y' - 17 =$	Б)	$3k^2 - k + 1 = 0$
3)	$3y'' - y' + 1 =$	В)	$k^2 - 7k + 3 = 0$
4)	$y'' - 7y' + 3 =$	Г)	$2k^2 + 10k - 17 = 0$

Правильный ответ:

1	2	3	4
А	Г	Б	В

Компетенции (индикаторы): ОПК-1 (ОПК-1.1, ОПК-1.2)

Задания закрытого типа на установление правильной последовательности

1. Расположите дифференциальные уравнения в порядке возрастания их порядка:

А) $y'' - y' = x^2$

Б) $y^{IV} + y'' = 0$

В) $y^V + (y'')^7 = x$

Г) $xy' + y = 0$

Правильный ответ: Г, А, Б, В

Компетенции (индикаторы): ОПК-1 (ОПК-1.1, ОПК-1.2)

2. Расположите действия в порядке их выполнения при решении линейного неоднородного уравнения первого порядка методом Лагранжа:

А) Заменить константу интегрирования c на функцию $c(x)$

Б) Провести замену функции $y(x)$ и ее производных в исходном неоднородном уравнении на общее решение соответствующего однородного уравнения с варьированной константой c и решить дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными относительно $c(x)$

В) Решить соответствующее однородное уравнение

Г) Найти общее решение исходного неоднородного уравнения

Правильный ответ: В, А, Б, Г

Компетенции (индикаторы): ОПК-1 (ОПК-1.1, ОПК-1.2)

3. Расположите значения констант интегрирования при решении задачи Коши для заданных дифференциальных уравнений в порядке возрастания их значений:

А) $y' = x, y(0) = 1$

Б) $y' = 2x, y(0) = -1$

В) $y' = x^2, y(0) = 0$

Г) $y' = -x, y(0) = 2$

Правильный ответ: Б, В, А, Г

Компетенции (индикаторы): ОПК-1 (ОПК-1.1, ОПК-1.2)

4. Расположите действия в порядке их выполнения при решении задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка:

А) Найти частное решение заданного дифференциального уравнения

Б) Подставить в общее решение заданные начальные условия

В) Найти численное значение константы интегрирования

Г) Найти общее решение заданного дифференциального уравнения

Правильный ответ: Г, Б, В, А

Компетенции (индикаторы): ОПК-1 (ОПК-1.1, ОПК-1.2)

Задания открытого типа

Задания открытого типа на дополнение

1. Напишите пропущенное слово (словосочетание).

_____ – это уравнение, связывающее между собой независимые переменные, неизвестную функцию этих переменных и её производные (или дифференциалы).

Правильный ответ: дифференциальное уравнение.

Компетенции (индикаторы): ОПК-1 (ОПК-1.1, ОПК-1.2)

2. Напишите пропущенное слово (словосочетание).

Нахождение любого частного решения дифференциального уравнения вида $y = \varphi(x, c_0)$, удовлетворяющего начальным условиям $y(x_0) = y_0$, называется задачей _____.

Правильный ответ: Коши.

Компетенции (индикаторы): ОПК-1 (ОПК-1.1, ОПК-1.2)

3. Напишите пропущенное слово (словосочетание).

_____ – это график $y = \varphi(x)$ решения дифференциального уравнения на плоскости XOY.

Правильный ответ: интегральная кривая.

Компетенции (индикаторы): ОПК-1 (ОПК-1.1, ОПК-1.2)

4. Напишите пропущенное слово (словосочетание).

_____ дифференциального уравнения – это решение, во всех точках которого условие единственности Коши не выполняется, то есть в окрестности некоторой точки $(x; y)$ существует не менее двух интегральных кривых.

Правильный ответ: особое решение.

Компетенции (индикаторы): ОПК-1 (ОПК-1.1, ОПК-1.2)

Задания открытого типа с кратким свободным ответом

1. Найти решение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными $\frac{1}{x} \cdot y' + \frac{1}{\sin y} = 0$ при константе интегрирования $c = 0$ (Ответ запишите в виде $y = \dots$).

Правильный ответ: $y = \arccos(\frac{x^2}{2})$.

Компетенции (индикаторы): ОПК-1 (ОПК-1.1, ОПК-1.2)

2. Записать наименование дифференциального уравнения вида:

$$y' + p(x) \cdot y = q(x) \cdot y^n, \quad n \neq 0; 1$$

Правильный ответ: уравнение Бернулли.

Компетенции (индикаторы): ОПК-1 (ОПК-1.1, ОПК-1.2)

3. Найти порядок однородности функции, стоящей в правой части дифференциального уравнения:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x \cdot y}{x^2 - y^2}$$

(Ответ запишите в виде числа)

Правильный ответ: 0.

Компетенции (индикаторы): ОПК-1 (ОПК-1.1, ОПК-1.2)

4. Записать выражение для нахождения интегрирующего множителя при решении линейного обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка $y' + p(x) \cdot y = q(x)$ методом Эйлера (Ответ запишите в виде $\mu = \dots$)

Правильный ответ: $\mu = e^{\int p(x) dx}$.

Компетенции (индикаторы): ОПК-1 (ОПК-1.1, ОПК-1.2)

Задания открытого типа с развернутым ответом

1. Решить задачу Коши для заданного дифференциального уравнения:

$$\frac{y}{x} dx + (y^3 + \ln x) dy = 0,$$

при заданных начальных условиях $y(1) = -2$.

Привести расширенное решение.

Время выполнения – 40 мин.

Ожидаемый результат:

1. Данное уравнение имеет вид:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0,$$

причем $M(x, y) = \frac{y}{x}$, $N(x, y) = y^3 + \ln x$. Тогда:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{1}{x}, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{1}{x}$$

Таким образом, выполняется условие:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

и исходное уравнение является дифференциальным уравнением в полных дифференциалах.

2. Следовательно, существует функция $U(x, y)$, такая что

$$dU = \frac{y}{x} dx + (y^3 + \ln x) dy$$

По определению полного дифференциала

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy$$

Сравнив последние два выражения, получим систему дифференциальных уравнений для нахождения неизвестной функции $U(x, y)$:

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{y}{x} \\ \frac{\partial U}{\partial y} = y^3 + \ln x \end{cases}$$

Рассмотрим первое уравнение системы $\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{y}{x}$. Частная производная по x вычисляется при условии $y = \text{const}$, поэтому чтобы найти из этого равенства $U(x, y)$, проинтегрируем его в том же предположении:

$$\int \frac{\partial U}{\partial x} dx = \int \frac{y}{x} dx$$

$$U(x, y) = y \cdot \ln x + c(y)$$

В рамках условия $y = \text{const}$ постоянная интегрирования будет зависеть от y .

3. Теперь подставим найденную функцию во второе уравнение системы

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \ln x + c'(y) = y^3 + \ln x$$

Отсюда получим уравнение для определения неизвестной функции $c(y)$

$$\begin{aligned} c'(y) &= y^3 \\ \frac{dc(y)}{dy} &= y^3 \\ \int dc(y) &= \int y^3 dy \\ c(y) &= \frac{y^4}{4} + c_1 \end{aligned}$$

4. Таким образом, общий интеграл исходного дифференциального уравнения имеет вид

$$y \cdot \ln x + \frac{y^4}{4} + c_1 = c_2$$

или

$$y \cdot \ln x + \frac{y^4}{4} = c, \quad \text{где } c = c_2 - c_1$$

По начальному условию $y(1) = -2$, поэтому

$$-2 \cdot \ln 1 + \frac{16}{4} = c, \quad c = 4$$

Таким образом, получили решение поставленной задачи Коши:

$$y \cdot \ln x + \frac{y^4}{4} = 4$$

Ответ: $y \cdot \ln x + \frac{y^4}{4} = 4$.

Критерии оценивания:

- определение вида дифференциального уравнения;
- нахождение неизвестной функции $U(x, y)$, полным дифференциалом которой является левая часть исходного уравнения;
- нахождение неизвестной функции $c(y)$;
- нахождение общего и частного интеграла исходного дифференциального уравнения.

Компетенции (индикаторы): ОПК-1 (ОПК-1.1, ОПК-1.2)

2. Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$y'' + 4y = 2 \operatorname{tg} x$$

Привести расширенное решение.

Время выполнения – 40 мин.

Ожидаемый результат:

1. Составим соответствующее однородное дифференциальное уравнение и решим его:

$$y'' + 4y = 0$$

Характеристическое уравнение $k^2 + 4k = 0$ имеет комплексные корни

$$k_{1,2} = \pm 2i$$

Получили фундаментальную систему решений:

$$y_1 = \cos 2x, \quad y_2 = \sin 2x$$

Получили общее решение однородного уравнения:

$$y_{oo} = c_1(x) \cdot \cos 2x + c_2(x) \cdot \sin 2x$$

2. Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} c'_1 \cdot \cos 2x + c'_2 \cdot \sin 2x = 0 \\ -2c'_1 \cdot \sin 2x + 2c'_2 \cdot \cos 2x = 2 \operatorname{tg} x \end{cases}$$

$$\begin{cases} c'_1 \cdot \cos 2x + c'_2 \cdot \sin 2x = 0 \\ -c'_1 \cdot \sin 2x + c'_2 \cdot \cos 2x = \operatorname{tg} x \end{cases}$$

Решим систему методом Крамера.

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ -\sin 2x & \cos 2x \end{vmatrix} = \cos^2 2x + \sin^2 2x = 1$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & \sin 2x \\ \operatorname{tg} x & \cos 2x \end{vmatrix} = -\operatorname{tg} x \cdot \sin 2x$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \cos 2x & 0 \\ -\sin 2x & \operatorname{tg} x \end{vmatrix} = \operatorname{tg} x \cdot \cos 2x$$

Получаем

$$\begin{cases} c'_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\operatorname{tg} x \cdot \sin 2x \\ c'_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \operatorname{tg} x \cdot \cos 2x \end{cases}$$

Отсюда

$$c_1 = - \int \operatorname{tg} x \cdot \sin 2x \cdot dx = - \int \frac{\sin x}{\cos x} \cdot 2 \cdot \sin x \cdot \cos x \cdot dx =$$

$$= -2 \int \sin^2 x \cdot dx = \int (\cos 2x - 1) \cdot dx = \frac{1}{2} \sin 2x - x$$

$$c_2 = \int \operatorname{tg} x \cdot \cos 2x \cdot dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \cdot (2 \cdot \cos^2 x - 1) \cdot dx =$$

$$= \int (\sin 2x - \operatorname{tg} x) \cdot dx = -\frac{1}{2} \cos 2x + \ln |\cos x|$$

Таким образом, получаем частное решение исходного неоднородного уравнения

$$\begin{aligned} y_{\text{чн}}(x) &= \left(\frac{1}{2} \sin 2x - x \right) \cdot \cos 2x + \left(-\frac{1}{2} \cos 2x + \ln |\cos x| \right) \cdot \sin 2x = \\ &= -x \cdot \cos 2x + \sin 2x \cdot \ln |\cos x| \end{aligned}$$

3. Общим решением исходного неоднородного дифференциального уравнения является функция

$$\begin{aligned} y &= y_{oo} + y_{\text{чн}} = c_1 \cdot \cos 2x + c_2 \cdot \sin 2x - x \cdot \cos 2x + \sin 2x \cdot \ln |\cos x| = \\ &= (c_1 - x) \cdot \cos 2x + (c_2 + \ln |\cos x|) \cdot \sin 2x, \quad c_1, c_2 \in R \end{aligned}$$

Ответ: $y = (c_1 - x) \cdot \cos 2x + (c_2 + \ln|\cos x|) \cdot \sin 2x$.

Критерии оценивания:

- нахождение общего решения соответствующего однородного уравнения;
- нахождение частного решения исходного неоднородного уравнения;
- нахождение общего решения исходного неоднородного уравнения.

Компетенции (индикаторы): ОПК-1 (ОПК-1.1, ОПК-1.2)

Экспертное заключение

Представленный комплект оценочных материалов по дисциплине «Дифференциальные уравнения» соответствует требованиям ФГОС ВО.

Предлагаемые оценочные материалы адекватны целям и задачам реализации основной профессиональной образовательной программы по направлению подготовки 03.03.02 Физика.

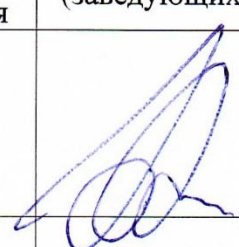
Виды оценочных средств, включенные в представленный фонд, отвечают основным принципам формирования ФОС.

Разработанные и представленные для экспертизы оценочные материалы рекомендуются к использованию в процессе подготовки обучающихся по указанному направлению.

Председатель учебно-методической комиссии
института компьютерных систем и
информационных технологий

Ветрова Н. Н.

Лист изменений и дополнений

№ п/п	Виды дополнений и изменений	Дата и номер протокола заседания кафедры (кафедр), на котором были рассмотрены и одобрены изменения и дополнения	Подпись (с расшифровкой) заведующего кафедрой (заведующих кафедрами)
1.	Дополнен комплектом оценочных материалов	протокол заседания кафедры прикладной математики № <u>8</u> от <u>24.02.2025</u>	 В.В. Малый