Комплект оценочных материалов по дисциплине
«Численные методы»

Задания закрытого типа

Задания закрытого типа на выбор правильного ответа

Выберите один правильный ответ

1. Значащими цифрами считаются …
А) все цифры данного числа, приведенные в его записи
Б) все цифры данного числа, начиная с первой ненулевой цифры
В) все цифры данного числа, не считая нулей в конце записи
Г) все цифры данного числа, находящиеся перед десятичным разделителем (запятой)
Правильный ответ: Б
Компетенции (индикаторы): ОПК-1

2. Задача вычисления $y = A(x)$ называется корректно поставленной, если для любых входных данных из некоторого класса решение задачи существует, единственно и устойчиво по входным данным
А) верно
Б) неверно
Правильный ответ: А
Компетенции (индикаторы): ОПК-1

3. Квадратурная формула Симпсона (парабол) имеет степень
А) n
Б) 2
В) 3
Г) n+1
Правильный ответ: В
Компетенции (индикаторы): ОПК-1

Выберите все правильные варианты ответов

4. К численным методам решения обыкновенных дифференциальных уравнений относятся:
А) метод Филона
Б) метод Эйлера
В) метод Симпсона
Г) метод Адамса
Д) метод Рунге-Кутта
Е) метод Фибоначчи

Правильные ответы: Б, Г, Д
Компетенции (индикаторы): ОПК-1

Задания закрытого типа на установление соответствия

Установите правильное соответствие.
Каждому элементу левого столбца соответствует только один элемент правого столбца.

1. Установите соответствие предложенного описания результатов применения методов построения функций по дискретно заданным данным их названиям

Описание результата	Название метода
1) Получена непрерывная функция, она проходит через некоторые из заданных точек на плоскости	А) Интерполяционный полином Лагранжа
2) Получена непрерывная функция (полином), ее степень зависит от количества узлов сетки, она проходит через все заданные точки на плоскости	Б) Интерполяционный сплайн
3) Получена кусочно-непрерывная функция (полином), ее степень не зависит от количества узлов сетки, она проходит через все заданные точки на плоскости	В) Метод наименьших квадратов
	Г) Метод Рунге-Кутта

Правильный ответ: 1-В, 2-А, 3-Б
Компетенции (индикаторы): ОПК-1

2. Установите соответствие между названиями численных методов решения систем уравнений и записью формул их итерационных процессов

1) Метод Якоби	А) $x_n = \varphi_1(x_{n-1}, y_{n-1})$ $y_n = \varphi_2(x_{n-1}, y_{n-1})$
2) Метод Ньютона	Б) $x^{(k)} = Bx^{(k-1)} + d, \quad k = 1, 2, \ldots$
3) Метод итераций	В) $x^{(p+1)} = x^{(p)} - W^{-1}\left(x^{(p)}\right) \cdot f\left(x^{(p)}\right), \; p = 0, 1, 2, \ldots$

Правильный ответ: 1-Б, 2-В, 3-А
Компетенции (индикаторы): ОПК-1

3. Установите соответствие между названиями численных методов уточнения корней уравнений и записью формул их итерационных процессов

1) Метод касательных	А) $x_n = \varphi(x_{n-1}), \; n = 1, 2, \ldots$

2) Метод хорд Б) $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f(b) - f(x_k)}(b - x_k), \ x_0 = a$

3) Метод итераций В) $x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n), \ n = 0, 1, 2, \ldots$

Правильный ответ: 1-В, 2-Б, 3-А
Компетенции (индикаторы): ОПК-1

4. Установите соответствие между названиями численных методов решения задачи Коши для дифференциальных уравнений и записью формул их итерационных процессов

1) Метод Эйлера А) $y_{i+1} = y_i + hf\left(x_i + \frac{h}{2}, \ y_i + \frac{h}{2}f(x_i, y_i)\right)$

2) Метод Рунге-Кутта второго порядка Б) $y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i), \ i = 0, 1, \ldots, n$

Правильный ответ: 1-Б, 2-А
Компетенции (индикаторы): ОПК-1

Задания закрытого типа на установление правильной последовательности

Установите правильную последовательность.
Запишите правильную последовательность букв слева направо.

1. Восстановите правильную хронологию действий при использовании метода наименьших квадратов:
А) определение вида аппроксимирующей функции
Б) определение коэффициентов и запись самой аппроксимирующей функции
В) построение исходных данных в соответствующей системе координат
Г) решение системы уравнений, получающейся после приравнивания частных производных от функции S нулю
Правильный ответ: В, А, Г, Б
Компетенции (индикаторы): ОПК-1

2. Установите правильную последовательность действий при вычислении определенного интеграла методом трапеций:
А) используем формулу трапеций численного интегрирования
Б) определяем величину шага численного интегрирования исходя из заданной точности
В) проводим оценку максимума модуля второй производной подынтегральной функции

Г) для подынтегральной функции составляем сеточную функцию с точностью до соответствующего знака после запятой
Правильный ответ: В, Б, Г, А
Компетенции (индикаторы): ОПК-1

3. Установите правильную последовательность действий при решении СЛАУ методом Якоби:
А) определение (вычисление) условия остановки итерационного процесса
Б) вычисление нормы матрицы B
В) приведение системы к виду с диагональным преобладанием
Г) определение начального приближения и запуск процесса итераций
Правильный ответ: В, Б, А, Г
Компетенции (индикаторы): ОПК-1

4. Расположите пункты алгоритма простого градиентного метода в правильной последовательности:
А) вычисление координат новой точки по формуле $\vec{x}^{(1)} = \vec{x}^{(0)} - h \cdot \vec{g}^{(0)}$
Б) вычисление значения функции в новой точке $f\left(\vec{x}^{(1)}\right)$
В) Проверка выполнения условия $\left\|\vec{x}^{(1)} - \vec{x}^{(0)}\right\| \leq \varepsilon$, если оно выполняется, то поиск прекращается, в противном случае $\vec{x}^{(1)}$ принимается за $\vec{x}^{(0)}$ и все начинается заново
Г) Если значение $f\left(\vec{x}^{(1)}\right) > f\left(\vec{x}^{(0)}\right)$, то величина h уменьшается в два раза и снова вычисляется $\vec{x}^{(1)}$
Д) Выбор начального приближения $\vec{x}^{(0)}$, вычисление значения целевой функции $f\left(\vec{x}^{(0)}\right)$, выбор величины шага h.
Правильный ответ: Д, А, Б, Г, В
Компетенции (индикаторы): ОПК-1

Задания открытого типа

Задания открытого типа на дополнение

Напишите пропущенное слово (словосочетание).

1. Задача вычисления $y = A(x)$ называется корректно поставленной, если для любых входных данных из некоторого класса решение задачи существует, ____________ и устойчиво по входным данным.
Правильный ответ: единственно
Компетенции (индикаторы): ОПК-1

2. При этом искомая интегральная кривая $y = y(x)$, проходящая через точку $M_0(x_0, y_0)$, заменяется ломаной $M_0M_1M_2$ ... с вершинами $M_i(x_i, y_i)$ $(i = 0, 1, 2, \dots)$; каждое звено M_iM_{i+1} этой ломаной, называемой ломаной

_________, имеет направление, совпадающее с направлением той интегральной кривой уравнения $y' = f(x, y)$, которая проходит через точку M_i.
Правильный ответ: Эйлера
Компетенции (индикаторы): ОПК-1

3. В основе метода ____________ для системы уравнений лежит использование разложений функций $F_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ в ряд Тейлора, причем члены, содержащие вторые производные (и производные более высоких порядков), отбрасываются.
Правильный ответ: Ньютона
Компетенции (индикаторы): ОПК-1

Напишите результат вычислений.

4. Определите количество верных знаков числа $72.353(\pm 0.026)$
(Ответ запишите в виде целого числа)
Правильный ответ: 3
Компетенции (индикаторы): ОПК-1

Задания открытого типа с кратким свободным ответом

Напишите пропущенное слово (словосочетание).

1. Численный метод нахождения корня уравнения с заданной степенью точности, в котором присутствует формула $x = (a + b)/2$ называется методом ____________.
Правильный ответ: половинного деления / дихотомии / бисекции
Компетенции (индикаторы): ОПК-1

2. Численный метод вычисления значения определенного интеграла с заданной степенью точности, в котором на каждом частичном сдвоенном интервале площадь криволинейной трапеции оценивается как $\frac{h}{3}(y_k + y_{k+1} + y_{k+2})$ называется методом ____________.
Правильный ответ: парабол / Симпсона
Компетенции (индикаторы): ОПК-1

Напишите результат вычислений.

3. Запишите матрицу коэффициентов системы линейных уравнений (без правой части), которую нужно решить для нахождения параметров аппроксимирующей функции $y = ax + b$ для данных

x_i	0	1	2	4
y_i	0.2	0.9	2.1	3.7

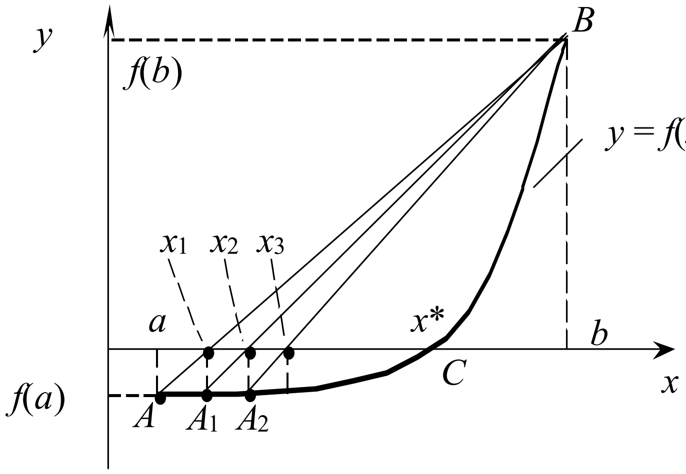
Ответ: Матрица коэффициентов системы будет иметь вид $A =$ _______ .

Правильный ответ: $\begin{pmatrix} 21 & 7 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$ / $\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 21 & 7 \end{pmatrix}$

Компетенции (индикаторы): ОПК-1

Дайте ответ на вопрос.

4. Геометрической интерпретацией какого метода является иллюстрация, приведенная ниже?



Правильный ответ: хорд / пропорциональных частей

Компетенции (индикаторы): ОПК-1

Задания открытого типа с развернутым ответом

1. Используя метод простой итерации (Якоби), найти решение системы с точностью $\varepsilon = 10^{-4}$.

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 + 2x_3 = 1.75 \\ x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 2.5 \\ 2x_1 + x_2 - 8x_3 = -0.25 \end{cases}$$

Привести расширенное решение

Время выполнения – 30 мин.

Ожидаемый результат:

Диагональное преобладание в матрице A исходной системы присутствует. Приведем систему к виду, удобному для итераций. Для этого из первого уравнения системы выразим неизвестное x_1, из второго уравнения – неизвестное x_2, из третьего – неизвестное x_3. В результате получим систему

$$\begin{cases} x_1 = 0.25x_2 - 0.5x_3 + 0.4375 \\ x_2 = 0.20x_1 + 0.6x_3 - 0.5 \\ x_3 = 0.25x_1 + 0.125x_2 + 0.03125 \end{cases}$$

В последнем уравнении коэффициенты даны с точностью до погрешности округления. Здесь

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0.25 & -0.5 \\ 0.2 & 0 & 0.6 \\ 0.25 & 0.125 & 0 \end{pmatrix}, \; d = \begin{pmatrix} 0.4375 \\ -0.5 \\ 0.03125 \end{pmatrix}.$$

Достаточное условие сходимости метода простой итерации выполнено, так как

$$\|B\| = \max_i \{0.75,\ 0.8,\ 0.375\} = 0.8 < 1.$$

Примем за начальное приближение к решению вектор $x^{(0)} = d = (0.43750, -0.50000,\ 0.03125)^T$
и будем вести итерации по формуле

$$x_i^{(k+1)} = \sum_{j=1}^{3} b_{ij} x_j^{(k)} + d_i$$

до выполнения критерия остановки, где в данном случае $\varepsilon = \frac{1-0,8}{0,8} \cdot 10^{-4} = 0,25 \cdot 10^{-4}$.
Значения приближений в таблице приводятся с пятью цифрами после десятичной точки.

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$\left\Vert X^{(k)} - X^{(k-1)} \right\Vert$
0	0.43750	–0.50000	0.03125	–
1	0.29688	–0.39375	0.07812	0.14062
2	0.30000	–0.39375	0.05625	0.02187
3	0.31094	–0.40625	0.05703	0.01250
4	0.30742	–0.40359	0.05820	$3.52 \cdot 10^{-3}$
5	0.30750	–0.40360	0.05766	$5.4 \cdot 10^{-4}$
6	0.30777	–0.40390	0.05768	$3 \cdot 10^{-4}$
7	0.30768	–0.40384	0.05770	$9 \cdot 10^{-5}$
8	0.30769	–0.40384	0.05769	$1 \cdot 10^{-5}$

При $k=8$ условие остановки выполняется и можно окончательно положить

$x_1 = 0.3077 \pm 0.0001$, $x_2 = -0{,}4038 \pm 0.0001$, $x_3 = 0.0577 \pm 0.0001$.

2. Решить уравнение $e^{2x} + 3x - 4 = 0$ с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$ методом касательных (Ньютона).
Привести расширенное решение.
Время выполнения – 30 мин.
Критерии оценивания:
– наличие локализации корня графическим либо аналитическим способом
– обоснование выбора начального приближения
– проведение итераций с сохранением запасного знака
– получение решения уравнения с заданной точностью $x \approx 0.474$
Компетенции (индикаторы): ОПК-1

3. Построить интерполяционный многочлен Лагранжа для функции $y = f(x)$, заданной таблично

x	0.351	0.867	3.315	5.013	6.432
y	-0.572	-2.015	-3.342	-5.752	-6.911

Вычислить значение функции в точке $x_1 + x_2$.
Привести расширенное решение
Время выполнения – 30 мин.
Ожидаемый результат:
Построим интерполяционный многочлен Лагранжа 4-й степени $L_4(x)$ в виде линейной комбинации $L_4(x) = \sum_{k=0}^{4} f(x_k)\, l_k(x)$.

Вычислим базисные многочлены.

$$l_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)(x_0 - x_4)} =$$

$$= \frac{(x - 0.867)(x - 3.315)(x - 5.013)(x - 6.432)}{(0.351 - 0.867)(0.351 - 3.315)(0.351 - 5.013)(0.351 - 6.432)} =$$

$$= 0.0231 \cdot (x - 0.867)(x - 3.315)(x - 5.013)(x - 6.432),$$

Аналогично

$$l_1(x) = \frac{(x - 0.351)(x - 3.315)(x - 5.013)(x - 6.432)}{(0.867 - 0.351)(0.867 - 3.315)(0.867 - 5.013)(0.867 - 6.432)} =$$

$$= -0.0343 \cdot (x - 0.351)(x - 3.315)(x - 5.013)(x - 6.432),$$

$$l_2(x) = \frac{(x - 0.351)(x - 0.867)(x - 5.013)(x - 6.432)}{(3.315 - 0.351)(3.315 - 0.867)(3.315 - 5.013)(3.315 - 6.432)} =$$

$$= 0.0260 \cdot (x - 0.351)(x - 0.867)(x - 5.013)(x - 6.432),$$

$$l_3(x) = \frac{(x - 0.351)(x - 0.867)(x - 3.315)(x - 6.432)}{(5.013 - 0.351)(5.013 - 0.867)(5.013 - 3.315)(5.013 - 6.432)} =$$

$= -0.0215 \cdot (x-0.351)(x-0.867)(x-3.315)(x-6.432),$

$$l_4(x) = \frac{(x-0.351)(x-0.867)(x-3.315)(x-5.013)}{(6.432-0.351)(6.432-0.867)(6.432-3.315)(6.432-5.013)} =$$

$= 0.0067 \cdot (x-0.351)(x-0.867)(x-3.315)(x-5.013).$

Тогда интерполяционный полином Лагранжа будет иметь вид

$$\begin{aligned} L_4(x) = &-0.0132 \cdot (x-0.867)(x-3.315)(x-5.013)(x-6.432) + \\ &+0.0691 \cdot (x-0.351)(x-3.315)(x-5.013)(x-6.432) - \\ &-0.0870 \cdot (x-0.351)(x-0.867)(x-5.013)(x-6.432) + \\ &+0.1235 \cdot (x-0.351)(x-0.867)(x-3.315)(x-6.432) - \\ &-0.0462 \cdot (x-0.351)(x-0.867)(x-3.315)(x-5.013). \end{aligned}$$

Вычислим значение полинома в заданной точке

$L_4(x_1+x_2) = L_4(0.867+3.315) = -4.3453.$

4. Найти минимум функции $f(x) = f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2 + e^{x_1+x_2}$ методом градиентного спуска, завершив расчет при

$$\left|\frac{\partial f(x^{(k)})}{\partial x_i}\right| \le 0.05,\ i = 1,2\ .$$

Привести расширенное решение.

Время выполнения – 25 мин.

Ожидаемый результат:

Для решения задачи выберем начальное приближение $x^{(0)} = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}\right) = (0;0)$ и $h = 1$.

1-й шаг: $k = 0$; $x_1^{(0)} = 0$; $x_2^{(0)} = 0$; $h = 1$; $f\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}\right) = 1$, $\frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_1} = 1$, , $\frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_2} = 1$.

Тогда по формуле метода получаем

$x_1^{(1)} = x_1^{(0)} - h\frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_1} = -1$; $x_2^{(1)} = x_2^{(0)} - h\frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_2} = -1$;

$f\left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}\right) = 3.145 > f\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}\right) = 1$, согласно алгоритма необходимо уменьшить шаг h. Уменьшим его вдвое, приняв $h = 0.5$ и повторяем вычисления с $x_1^{(0)} = 0$; $x_2^{(0)} = 0$:

$x_1^{(1)} = 0 - 0.5 \cdot 1 = -0.5$; $x_2^{(1)} = 0 - 0.5 \cdot 1 = -0.5$;

$f\left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}\right) = 1.118 > f\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}\right) = 1$, снова необходимо уменьшить шаг h вдвое: $h = 0.25$. Повторяем вычисления:

$x_1^{(1)} = x_1^{(0)} - h\frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_1} = 0 - 0.25 \cdot 1 = -0.25$; $x_2^{(1)} = x_2^{(0)} - h\frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_2} = 0 - 0.25 \cdot 1 = -0.25$;

$f\left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}\right) = f(-0.25;\ -0.25) = 0.794 < f\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}\right) = 1$;

$$\frac{\partial f\left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}\right)}{\partial x_1} = 2x_1^{(1)} + exp\left(x_1^{(1)} + x_2^{(1)}\right) = -0.5 + exp(-0.25 - 0.25)$$
$$= 0.106;$$
$$\frac{\partial f\left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}\right)}{\partial x_2} = 4x_2^{(1)} + exp\left(x_1^{(1)} + x_2^{(1)}\right) = 4(-0.25) + exp(-0.25 - 0.25)$$
$$= -0.393;$$
$\left|grad\ f\left(x^{(1)}\right)\right| = \sqrt{0.106^2 + (-0.393)^2 = 0.407} > \varepsilon = 0.05.$

2-й шаг: $k = 1;\ x_1^{(1)} = -0.25;\ x_2^{(1)} = -0.25;\ h = 0.25;$

$x_1^{(2)} = x_1^{(1)} - h\frac{\partial f(x^{(1)})}{\partial x_1} = -0.25 - 0.25 \cdot 0.106 = -0.2765;$

$x_2^{(2)} = x_2^{(1)} - h\frac{\partial f(x^{(1)})}{\partial x_2} = -0.25 - 0.25 \cdot (-0.393) = -0.1518;$

$f\left(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}\right) = 0.774 < f\left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}\right) = 0.794$. Таким образом, можно сохранить значение h, приняв $h = 0.25$.

$\frac{\partial f\left(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}\right)}{\partial x_1} = 2x_1^{(1)} + exp\left(x_1^{(1)} + x_2^{(1)}\right) = 0.0983;$ $\frac{\partial f\left(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}\right)}{\partial x_2} = 4x_2^{(1)} + exp\left(x_1^{(1)} + x_2^{(1)}\right) = 0.0451;$

$\left|grad\ f\left(x^{(2)}\right)\right| = \sqrt{0.0983^2 + 0.0451^2} = 0.108 > \varepsilon = 0.05.$

3-й шаг: $k = 2;\ x_1^{(1)} = -0.2765;\ x_2^{(2)} = -0.1518;\ h = 0.25;$

$x_1^{(3)} = x_1^{(3)} - h\frac{\partial f(x^{(2)})}{\partial x_1} = -0.2765 - 0.25 \cdot 0.0983 = -0.301;$

$x_2^{(3)} = x_2^{(2)} - h\frac{\partial f(x^{(2)})}{\partial x_2} = -0.1518 - 0.25 \cdot 0{,}0451 = -0.163;$

$f\left(x_1^{(3)}, x_2^{(3)}\right) = 0.772 < f\left(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}\right) = 0.774$. Таким образом, можно сохранить значение h, приняв $h = 0.25$.

$\frac{\partial f\left(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}\right)}{\partial x_1} = 2x_1^{(1)} + exp\left(x_1^{(1)} + x_2^{(1)}\right) = 0.0262;$ $\frac{\partial f\left(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}\right)}{\partial x_2} = 4x_2^{(1)} + exp\left(x_1^{(1)} + x_2^{(1)}\right) = -0.023;$

$\left|grad\ f\left(x^{(3)}\right)\right| = \sqrt{0.0262^2 + (-0{,}023)^2} = 0.03486 < \varepsilon.$

Точность достигнута, следовательно, $x^* = (x_1^*, x_2^*) \approx (-0.301;\ -0.163)$; $f^* \approx 0.772$

Ответ: точка минимума $x^* = (x_1^*, x_2^*) \approx (-0.301;\ -0.163)$, значени

Компетенции (индикаторы): ОПК-1

Экспертное заключение

Представленный комплект оценочных материалов по дисциплине «Численные методы» соответствует требованиям ФГОС ВО.

Предлагаемые оценочные материалы адекватны целям и задачам реализации основной профессиональной образовательной программы по направлению подготовки 09.03.02 Информационные системы и технологии.

Виды оценочных средств, включенные в представленный фонд, отвечают основным принципам формирования ФОС.

Разработанные и представленные для экспертизы оценочные материалы рекомендуются к использованию в процессе подготовки обучающихся по указанному направлению.

Председатель учебно-методической комиссии
института компьютерных систем и
информационных технологий Ветрова Н. Н.

Лист изменений и дополнений

№ п/п	Виды дополнений и изменений	Дата и номер протокола заседания кафедры (кафедр), на котором были рассмотрены и одобрены изменения и дополнения	Подпись (с расшифровкой) заведующего кафедрой (заведующих кафедрами)
1.	Дополнен комплектом оценочных материалов	протокол заседания кафедры прикладной математики № 8 от 24.02.2025	В.В. Малый