МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «ЛУГАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ ВЛАДИМИРА ДАЛЯ»

Факультет компьютерных систем и информационных технологий

Кафедра прикладной математики

УТВЕРЖДАЮ
Декан факультета компьютерных систем и информационных технологий
_______________ Кочевский А.А.
« 18 » ______ 04 ______ 2023 г.

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ
по учебной дисциплине

Высшая математика

12.03.01 Приборостроение

«Приборы и методы контроля качества и диагностики»
«Информационно-измерительная техника и технологии»

Разработчик:
доцент _________________ Щелоков В.С.

ФОС рассмотрен и одобрен на заседании кафедры прикладной математики от 18апреля 2023 г., протокол № 10

Заведующий кафедрой прикладной математики _______________ Малый В.В.

Луганск 2023 г.

Экспертное заключение

Представленный фонд оценочных средств (далее - ФОС) по дисциплине «Высшая математика» соответствует требованиям ФГОС ВО.

Предлагаемые формы и средства текущего и промежуточного контроля адекватны целям и задачам реализации основной профессиональной образовательной программы по направлению подготовки 12.03.01 Приборостроение.

Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины представлены в полном объеме.

Виды оценочных средств, включенные в представленный фонд, отвечают основным принципам формирования ФОС.

Разработанный и представленный для экспертизы фонд оценочных средств рекомендуется к использованию в процессе подготовки обучающихся, по указанному направлению.

Председатель учебно-методической комиссии факультета компьютерных систем и информационных технологий — Н.Н. Ветрова

Паспорт
фонда оценочных средств по учебной дисциплине
«Высшая математика»

Перечень компетенций (элементов компетенций), формируемых в результате освоения учебной дисциплины

№ п/п	Код контролируемой компетенции	Формулировка контролируемой компетенции	Контролируемые темы учебной дисциплины	Этапы формирования (семестр изучения)
1	УК-1	способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	Тема 1. Линейная алгебра	1 (начальный)
			Тема 2. Аналитическая геометрия	1 (начальный)
			Тема 3. Математический анализ	1, 2 (начальный)
			Тема 4. Комплексный анализ	2 (начальный)
			Тема 5. Дифференциальные уравнения	2 (начальный)
			Тема 6. Теория рядов	3 (начальный)
			Тема 7. Кратные и поверхностные интегралы	3 (начальный)
			Тема 8. Теория поля	3 (начальный)
2	ОПК-1	способен применять естественнонаучные и общеинженерные знания, методы математического анализа и моделирования в инженерной деятельности, связанной с проектированием и конструированием, технологиями производства приборов и комплексов широкого назначения	Тема 1. Линейная алгебра	1 (начальный)
			Тема 2. Аналитическая геометрия	1 (начальный)
			Тема 3. Математический анализ	1, 2 (начальный)
			Тема 4. Комплексный анализ	2 (начальный)
			Тема 5. Дифференциальные уравнения	2 (начальный)
			Тема 6. Теория рядов	3 (начальный)
			Тема 7. Кратные и поверхностные	3 (начальный)

			интегралы	
			Тема 8. Теория поля	3 (начальный)

Показатели и критерии оценивания компетенций, описание шкал оценивания

№ п/п	Код контролируемой компетенции	Показатель оценивания (знания, умения, навыки)	Контролируемые темы учебной дисциплины	Наименование оценочного средства
1.	УК-1 ОПК-1	знать: основные понятия и методы математического анализа, в части дифференциального и интегрального исчисления, теории рядов; теории линейной алгебры; аналитической геометрии; теории дифференциальных уравнений; основные алгоритмы типовых численных методов решения математических задач. уметь: использовать методы математического анализа, аналитической геометрии, линейной алгебры, теории функций комплексного переменного; использовать основные приёмы обработки экспериментальных данных. владеть: математическими понятиями и символами для выражения количественных и качественных отношений, математическими методами и алгоритмами в приложениях к техническим наукам.	Тема 1, Тема 2, Тема 3, Тема 4, Тема 5, Тема 6, Тема 7, Тема 8	Фронтальные и индивидуальные опросы; контрольные работы; индивидуальные /домашние задания; промежуточная аттестация (экзамен)

Фонды оценочных средств по дисциплине «Высшая математика»

Вопросы для фронтальных и индивидуальных опросов:

Тема 1. Линейная алгебра.

1. Какие системы линейных алгебраических уравнений называются определенными, неопределенными, несовместными?
2. Какой является квадратная система линейных алгебраических уравнений, если ее определитель равен нулю?
3. Какой должна быть система линейных алгебраических уравнений, чтобы ее можно было решать методом Крамера?
4. Система линейных алгебраических уравнений решается методом Гаусса. Как узнать, что она определенная, неопределенная, несовместная?
5. Что такое матрица? Какими могут быть матрицы?
6. Какие матрицы можно перемножать? Как они перемножаются?
7. Что такое определитель второго порядка?
8. Что такое определитель третьего порядка?
9. Что такое минор элемента a_{ij} определителя?
10. Что такое алгебраическое дополнение элемента a_{ij} определителя?
11. Что значит разложить определитель по элементам строки или столбца?
12. Какая матрица называется обратной по отношению к данной квадратной матрице?
13. Как записать крамеровскую систему линейных алгебраических уравнений в матричной форме?
14. Как построить обратную матрицу для данной квадратной матрицы с определителем, отличным от нуля?
15. Что такое вектор? его длина? орт вектора?
16. Сформулируйте свойства операции сложения векторов.
17. При каких условиях: 1) $|\vec{a}+\vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$? 2) $|\vec{a}+\vec{b}| = |\vec{a}| - |\vec{b}|$?
18. Какие несколько векторов называются линейно зависимыми? линейно независимыми?
19. Как геометрически располагаются пара или тройка векторов линейно зависимых векторов? линейно независимых векторов?
20. Что такое базис некоторого множества векторов? координаты вектора в выбранном базисе?
21. Сформулируйте правило сложения двух векторов, заданных разложениями в некотором базисе.
22. Сформулируйте понятие прямоугольного базиса и прямоугольной декартовой системы координат.
23. Что такое скалярное, векторное и смешанное произведение х векторов? Как их вычислять? Перечислите их свойства и геометрический смысл.

Тема 2. Аналитическая геометрия.

24. Что такое алгебраическая линия? Сформулируйте теорему об инвариантности порядка алгебраической линии.
25. Напишите равенства, выражающие условия параллельности и перпендикулярности двух прямых на плоскости.
26. Почему плоскости и только они называются поверхностями 1-го порядка?
27. Что такое эллипс? Сформулируйте свойство фокальных радиусов точки эллипса. Найдите координаты центра симметрии, полуоси.

28. Какие прямые называются асимптотами гиперболы? Напишите уравнения асимптот гиперболы $4x^2 - 9y^2 = 36$.

29. Прямая L задана уравнением с угловым коэффициентом $y = kx + b$. Поясните геометрический смысл k и b.

30. Прямые L_1 и L_2 заданы уравнениями $L_1: y = k_1x + b_1$, $L_2: y = k_2x + b_2$. Напишите условия параллельности и перпендикулярности этих прямых.

31. Как геометрически объяснить, что система уравнений
$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases}$$
является несовместной? совместной и неопределённой? совместной и определенной?

32. При каком условии плоскость и прямая в пространстве параллельны? перпендикулярны?

33. Напишите условие перпендикулярности прямых в пространстве.

34. Напишите общее уравнение плоскости. Каков геометрический смысл коэффициентов уравнения?

35. Напишите уравнение плоскости, проходящей через 3 заданные точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$, $M_3(x_3; y_3; z_3)$.

36. Запишите уравнение плоскости, проходящей через данную точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} = (A; B; C)$.

37. Что такое эллипсоид? Какими линиями являются его сечения координатными плоскостями в прямоугольной декартовой системе координат?

38. В каком случае эллипсоид называется эллипсоидом вращения? При вращении какой фигуры и вокруг какой оси он образуется?

39. Какой симметрией обладают однополостный и двуполостный гиперболоиды, параболоиды и почему?

40. Написать уравнения линий, образующихся в сечении координатными плоскостями гиперболоидов и параболоидов, заданных каноническими уравнениями. Нарисовать эти линии.

Тема 3. Математический анализ.

41. Какое числовое множество называется ограниченным сверху?
42. Какое числовое множество называется ограниченным снизу?
43. Какое числовое множество называется ограниченным снизу?
44. Что называется точной верхней границей числового множества?
45. Что называется точкой нижней границей числового множества?
46. Что называется модулем действительного числа?
47. При каких условиях $|x + y| = |x| + |y|$.
48. При каких условиях $|x + y| = -|x| + |y|$.
49. Напишите неравенства, связывающие модуль суммы и разности двух чисел с суммой и разностью их модулей.
50. Изобразите график функции $y = \operatorname{sign} x$.
51. Изобразите график функции $y = [x]$ – целая часть числа x.
52. Сформулируйте теорему о пределе ограниченной монотонной функции(последовательности).
53. Дайте определение понятия $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ на языке $\delta - \varepsilon$.
54. Дайте определение понятия $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, используя понятие бесконечно малой функции при $x \to a$.

55. Сформулируйте теорему о сжатой переменной.

56. Сформулируйте теорему о предельном переходе в неравенстве.

57. Сформулируйте теорему об ограниченности функции, имеющей предел при $x \to a$.

58. Сформулируйте теоремы о пределах суммы, произведения и частного функций.

59. Сформулируйте определение понятия $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = A$ на языке $\delta - \varepsilon$.

60. Сформулируйте определение понятия $\lim\limits_{x\to a-} f(x) = A$ на языке $\delta - \varepsilon$.

61. Дайте определение понятия $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = A$.

62. Дайте определение понятия $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = A$.

63. Дайте определение понятия $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = A$.

64. Напишите первый замечательный предел и пределы, связанные с ним.

65. Напишите второй замечательный предел и пределы, связанные с ним.

66. Дайте определение понятия $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$.

67. 27.Дайте определение понятия $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$.

68. Используя определение производной, найдите $y'(4)$, если $y = \sqrt{x}$.

69. Геометрический смысл производной. Напишите уравнение касательной к графику функции $y = \operatorname{arctg} x$ в точке $x = 1$.

70. Найдите углы, под которыми пересекаются линии $x^2 + y^2 = 8$, $y^2 = 2x$.

71. Приведите пример функции, график которой имеет в некоторой точке вертикальную касательную.

72. Найдите $f'_-(1)$ и $f'_+(1)$, если $f(x) = |x-1|e^x$. Существует ли $f'(1)$?

73. Найдите y'_x, если: а) $y = \ln\left(x + \sqrt{a^2 + x^2}\right)$; б) $y = \operatorname{arctg} th(x)$.

74. Что можно сказать о дифференцируемости суммы функций $f(x) + g(x)$ в точке $x = x_0$ если, в этой точке: а) функция $f(x)$ дифференцируема, а функция $g(x)$ не дифференцируема? б) обе функции $f(x)$ и $g(x)$ не дифференцируемы?

75. Используя определение, покажите, что функция $y = x^2 - 2x$ дифференцируема в точке $x = 2$ и найдите её дифференциал в этой точке.

76. Является ли непрерывность функции в данной точке достаточным условием дифференцируемости? Ответ обосновать с помощью примера.

77. Для каких функций дифференциал равен приращению? Приведите пример.

78. Сформулируйте, в чём состоит геометрический и физический смысл дифференциала.

79. Что понимается под инвариантностью формы первого дифференциала?

80. Используя формулу для вычисления дифференциала, найдите dy, если $y = x \cdot \sin x + \cos x$.

81. Пусть $y = \sin x$, $x = \cos t$ Какие из следующих равенств справедливы: $dy|_{t=\frac{\pi}{2}} = 0$; $dy|_{t=\frac{\pi}{2}} = dx$; $dy|_{t=\frac{\pi}{2}} = -dt$?

82. Может ли существовать $f''(x_0)$, если не существует $f'(x_0)$?

83. Найдите $f^{(n)}(x)$, если $f(x) = \ln x \cdot x$.

84. Вычислите, используя правило Лопиталя: а) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x\cdot\cos x - \sin x}{x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to +0} x^{\frac{2}{4+\ln x}}$.

85. Напишите формулу Тейлора для функции $f(x)$ с остаточным членом в форме: а) Пеано; б) Лагранжа.

86. Разложите функцию $f(x) = \ln\cos x$ по формуле Маклорена до членов с x^4.

87. С помощью формулы Маклорена или канонических разложений получите приближённую формулу (ограничиваясь членами порядка x^2) для функций: а) $y = \sqrt{1+x}, x \to 0, |x| < 1$; б) $y = \ln(1+3x), x \to 0, |x| < 1/3$.

88. Найдите числа a и b такие, что $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{ax}-\sqrt{1+bx}}{x^2} = 1$.

89. Исследуйте функции и постройте их графики: а) $y = \frac{(x-2)^2(x+4)}{4}$; б) $y = \frac{x}{x^2-4}$; в) $y = \sqrt[3]{1-x^2}$.

90. Какой из конусов, описанных около данного шара радиуса R, имеет наименьший объем?

91. Какая функция называется первообразной по отношению к функции $f(x)$, заданной на данном промежутке?

92. Чем отличаются две первообразные функции для одной и той же функции на одном и том же промежутке?

93. В чем состоит свойство линейности для неопределенного интеграла?

94. Запишите формулу интегрирования по частям в неопределенном интеграле.

95. Какую подстановку нужно выполнить для рационализации интеграла $\int R\left(\sqrt[3]{x}, \sqrt[4]{x}\right) dx$?

96. Укажите рационализирующую подстановку для интеграла $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right) dx$.

97. Какой интеграл называется неберущимся?

98. Сформулируйте достаточное условие существования первообразной.

99. Чему равен $\int F'(x)\,dx$? $\int dF(x)$?

100. Чему равна производная неопределенного интеграла?

101. Покажите, что функции $F_1(x) = -\frac{1}{2}\cos 2x$; $F_2(x) = \sin^2 x$ являются первообразными одной и той же функции на числовой оси.

102. Докажите справедливость формулы для табличного интеграла $\int x^n\,dx; (n \neq -1)$.

103. Докажите справедливость формулы для табличного интеграла $\int \frac{dx}{a^2+x^2}$.

104. Вычислите интеграл $\int \frac{dx}{x^2+px+q}$; $\left(q - \frac{p^2}{4} > 0\right)$, сведя его к табличному.

105. Вычислите интеграл $\int \frac{dx}{x^2+px+q}$; $\left(q - \frac{p^2}{4} < 0\right)$, сведя его к табличному.

106. Вычислите интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+px+q}}$, сведя его к табличному.

107. Вычислите с помощью интегрирования по частям $\int x \cdot \sin ax\,dx$.

108. Запишите интегральную сумму, составленную для функции $f(x)$ на промежутке $[a;b]$. Объясните смысл величин, входящих в формулу.

109. Какой геометрический смысл имеет определенный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$, где $f(x)$- непрерывная неотрицательная функция?

110. Сформулируйте достаточные условия интегрируемости функции $f(x)$ на конечном промежутке $[a,b]$.

111. Какая функция называется интегрируемой на промежутке $[a,b]$?

112. Чему равен $\int_a^b F'(x)\,dx$? $\int_a^b dF(x)$?

113. Сформулируйте необходимое условие интегрируемости функции на промежутке $[a, b]$.

114. Чему равен определенный интеграл от нечетной функции по симметричному промежутку$[-a; a]$?

115. Если пределы интегрирования поменять местами, то как изменится величина интеграла? Выразите это свойство формулой.

116. Сформулируйте свойство линейности определенного интеграла.

117. Сформулируйте свойство, связывающее знаки функции и определенного интеграла на промежутке $[a, b]$.

118. Сформулируйте свойство об интегрировании неравенства между функциями на промежутке $[a, b]$.

119. Сформулируйте свойство об оценке модуля определенного интеграла.

120. Сформулируйте теорему о среднем для определенного интеграла от непрерывной функции.

121. Запишите формулу Ньютона – Лейбница.

122. Приведите геометрическую интерпретацию теоремы о среднем для определенного интеграла.

123. Что такое среднее (интегральное) значение функции $f(x)$ на промежутке $[a, b]$?

124. Сформулируйте определение несобственного интеграла 1-го рода с бесконечным верхним пределом от непрерывной функции.

125. Сформулируйте определение несобственного интеграла 1-го рода с бесконечным нижним пределом от непрерывной функции.

126. Какой несобственный интеграл называется абсолютно сходящимся?

127. Укажите, для каких значений параметра p интеграл $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$, $(a > 0)$ является сходящимся, а для каких значений – расходящимся

128. Запишите формулы, выражающие свойство линейности для несобственного интеграла с бесконечным верхним пределом.

129. Сформулируйте признак сравнения в конечной форме на примере несобственных интегралов 1-го рода с бесконечным верхним пределом.

130. Что такое полный дифференциал функции $z = f(x, y)$?

131. Запишите формулу, определяющую частную производную функции $z = f(x, y)$ по переменной y в точке $M_0(x_0, y_0)$.

132. Какая функция двух аргументов называется дифференцируемой?

133. Запишите формулу, выражающую полный дифференциал функции $z = f(x, y)$ через её частные производные.

134. Запишите формулу, выражающую второй полный дифференциал функции $z = f(x, y)$ через её частные производные.

135. Как соотносятся между собой свойства непрерывности и дифференцируемости функции двух переменных?

136. Какая функция $z = f(x, y)$ называется непрерывной в точке $M_0(x_0, y_0)$?

137. Как определяется евклидово расстояние $\rho(M_1, M_2)$ между двумя точками $M\left(x_1^{(1)}, \dots, x_m^{(1)}\right)$и $M\left(x_1^{(2)}, \dots, x_m^{(2)}\right)$ m-мерного пространства?

138. Какая точка множества E называется внутренней? граничной?

139. Что такое δ-окрестность точки $M_0(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_m^{(0)})$?

140. Какое множество E называется ограниченным? замкнутым? связным?

141. Сформулируйте определение предела функции $f(M) = f(x,y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$.

142. Сформулируйте теорему о равенстве вторых смешанных производных функции $z = f(x,y)$.

143. Как соотносятся между собой свойства дифференцируемости и существования первых частных производных функции $z = f(x,y)$?

144. Сформулируйте определение производной функции

145. $u = f(M) = f(x,y,z)$ по направлению вектора $\vec{l}$.

146. Запишите формулу, выражающую производную функции $u = f(x,y,z)$ по направлению вектора $\overline{l^0} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ через частные производные функции u.

147. Запишите формулу, связывающую $\operatorname{grad} u$ и производную $\frac{\partial u}{\partial l}$ в заданной точке скалярного поля u.

148. Как связаны направления наибольшего роста функции $u = f(x,y,z)$ с вектором $\operatorname{grad} u$ в рассматриваемой точке $M(x,y,z)$?

149. Выразите $\max \frac{\partial u}{\partial l}$ и $\min \frac{\partial u}{\partial l}$ через $\operatorname{grad} u$ в заданной точке скалярного поля u.

150. Запишите формулу для производной $\frac{\partial z}{\partial y}$ сложной функции $z = z(u,v), \quad u = u(x,y), \quad v = v(x,y)$.

151. Запишите формулу для производной $\frac{dy}{dx}$ неявной функции, заданной уравнением $F(x,y) = 0$.

152. Запишите формулы для производных $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ неявной функции, заданной уравнением: $F(x,y,z) = 0$.

153. Сформулируйте определение локального максимума (локального минимума) функции $z = f(x,y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$.

154. Сформулируйте необходимые условия, а также достаточные условия экстремума функции $z = f(x,y)$.

155. Сформулируйте правило отыскания наибольшего и наименьшего значений функции $z = f(x,y)$ в ограниченной замкнутой области.

156. Что такое стационарная точка функции $z = f(x,y)$?

157. Сформулируйте определение условного максимума функции $u = f(M)$ при связи $\varphi(M) = 0$ (рассмотрите случай двух или трех переменных).

158. Сформулируйте необходимые условия условного экстремума функции $u = f(M)$ при связи $\varphi(M) = 0$ по методу Лагранжа (рассмотрите случай двух или трех переменных).

159. Сформулируйте теорему Вейерштрасса об ограниченности функции, непрерывной в замкнутой ограниченной области.

160. Сформулируйте теорему Вейерштрасса о существовании наибольшего и наименьшего значений функции, непрерывной в замкнутой ограниченной области.

Тема 4. Комплексный анализ.

161. Дайте определение множества $\mathbb{C}$ комплексных чисел. Какие геометрические интерпретации этого множества вам известны?

162. Пусть $z_1 = 1 + i$, $z_2 = -4 + 3i$. Найти $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $(z_1 + z_2)\ (z_1 - z_2)$, $\frac{z_1}{z_2}$.

163. Что называют модулем комплексного числа $z = x + iy$?

164. Что называют аргументом комплексного числа $z = x + iy$, $z \neq 0$? Что такое тригонометрическая форма этого числа?

165. Числа $z_1 = 1 - i\sqrt{3}$, $z_2 = (1 - i)/(1 + i)$, $z_3 = 1 + \cos(\pi/7) + i\sin(\pi/7)$ записать в тригонометрической форме.

166. Используя формулу Муавра, записать в алгебраической форме числа $z_1 = \left((1 + i\sqrt{3})/(1 - i)\right)^{20}$, $z_2 = (1 + i)^5/(1 - i)^3$.

167. Найти все значения следующих выражений: а) $\sqrt{-1 + i\sqrt{3}}$; б) $\sqrt[4]{2\sqrt{3} + 2i}$.

168. $z_1 = 1 - i\sqrt{3}$, $z_2 = \sqrt{3} + i$. Записать в алгебраической форме числа $z_1 \cdot \bar{z}_2$; $(\bar{z}_1/z_2)^2$.

169. Числа z_1, z_2 и z_3 записать в показательной форме.

170. Что такое корень алгебраического многочлена $P_n(z)$? Что называют кратностью корня? Определите кратность корня $a = 1$ многочлена $P_4(z) = z^4 - (2 - i)z^3 + (3 + 2i)z^2 - (4 + i)z + 2$.

171. Числа $a_1 = 1$, $a_2 = -i$, $a_3 = 2i$ – все попарно различные корни многочлена $P(z)$, причем a_1 – корень кратности 2, а a_2 и a_3 – простые корни. Запишите разложение $P(z)$ на линейные множители, если его старший коэффициент $p_0 = 1$; найдите его другие коэффициенты.

172. В чем состоит свойство корней вещественного многочлена? Число $a_1 = -1 + i$ является корнем многочлена $P_4(z) = z^4 + 4z^3 + 11z^2 + 14z + 10$; найти остальные корни $P_4(z)$, записать его разложение на вещественные множители первой и второй степени.

173. Что такое рациональная алгебраическая дробь? Приведите примеры.

174. Какую рациональную дробь называют правильной? неправильной? Дробь $\frac{z^5}{z^4 + 5z^2 + 4}$ представьте в виде суммы алгебраического многочлена и правильной дроби.

175. Какие дроби называют элементарными рациональными алгебраическими дробями? Дробь $1/(x^3 + 1)$ разложите в сумму элементарных дробей.

Тема 5. Дифференциальные уравнения.

176. Каков геометрический смысл уравнения $y'=f(x,y)$. Написать уравнение касательной к интегральной кривой уравнения $y' = x^2y^2$ в точке $M_0(1,\ 2)$.

177. Дайте определение изоклины дифференциального уравнения $y'=f(x,y)$. Изоклины уравнения $y' = x^2/y$ есть: A) окружности; B) прямые; C) параболы; D) гиперболы; E) эллипсы; F) нет прав. ответа.

178. Дано уравнение $y' = x^2 - 2x + y$. Напишите уравнение линии возможных точек экстремумов его интегральных кривых. Сделайте чертёж.

179. Сформулируйте теорему Коши для уравнения $y' = f(x,y)$. Пусть Ω − область, в которой выполнены её условия этого уравнения. Какие из последующих утверждений справедливы: A) его интегральные кривые могут иметь разрывы 1-го рода в Ω; B) интегральные кривые могут иметь угловой экстремум в Ω; C) интегральные кривые могут пересекаться в Ω; D) интегральные кривые могут быть прямыми линиями; E) нет правильного утверждения? Ответ обосновать.

180. Решите задачу Коши: $(1 + y^2)dx + xydy = 0$; $y(1) = 1$.

181. Найдите все решения уравнения $xy' = y + \sqrt{y^2 - x^2}$.

182. Найдите общие решения (интегралы) уравнений:

183. а) $xy' - 2y = x^3\cos x$; б) $3y' + y = 1/y^2$; в) $(x^3 + xy^2)dx + (x^2y + y^3)dy = 0$.

184. Найдите все линии, у которых отрезок касательной между точкой касания и осью абсцисс делится пополам в точке пересечения с осью ординат. Указание: Используйте уравнение касательной к кривой.

185. Сформулируйте теорему Коши для уравнения $y'' = f(x, y, y')$. Каков геометрический смысл начальных условий $y(0) = -1$, $y'(0) = 1$ для этого уравнения? Изобразите приближенно интегральную кривую в окрестности начальной точки, считая для определенности $y'' > 0$ в этой окрестности.

186. Найти значение α, при котором функция $y = x^2$ является решением уравнения $x(x-1)y'' - (2x-1)y' + \alpha y = 0$.

187. Дано уравнение: $y''^3 + xy'' = 2y'$. С помощью какой подстановки можно понизить его порядок? Напишите общий вид таких уравнений.

188. Найдите общие решения уравнений методом понижения порядка: а) $y''=\ln x$; б) $y'' = \frac{y'}{x} + x$.

189. Решите задачу Коши: $yy''=(y')^2-(y')^3$; $y(1)=1$, $y'(1)=1$.

190. Как с помощью фундаментальной системы решений $y_1(x)$, … , $y_n(x)$ записать общее решение уравнения $L[y] = 0$? Почему нулевое решение не может входить в фундаментальную систему решений уравнения $L[y] = 0$?

191. Дано уравнение: $y'' - 5y' + \alpha y = 0$. При каком значении α число 3 будет корнем его характеристического уравнения? Найти общее решение данного дифференциального уравнения при найденном значении α.

192. Линейное однородное дифференциальное уравнение 3-го порядка с постоянными коэффициентами имеет частные решения: 1, $\sin 3x$. Это уравнение может иметь вид: A) $y''' - 9y = 0$; B) $y''' - 9y' = 0$; C) $y''' + 9y = 0$; D) $y''' + 9y' = 0$; E) нет правильного ответа.

193. Решите линейное уравнение $y'' - 2y' + y = e^x/x$ методом вариации произвольных постоянных.

194. Найдите общее решение линейного неоднородного уравнения методом неопределённых коэффициентов: $y''-y=2e^x-x^2$.

195. Найдите частное решение линейного неоднородного уравнения $y''+y=4e^x$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=4$, $y'(0)=-3$, методом неопределённых коэффициентов.

196. Найдите общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 4y. \end{cases}$$

197. Точка с массой m движется прямолинейно. На неё действует сила, пропорциональная кубу времени, истекшему от момента, когда скорость была равна v (коэффициент пропорциональности равен k). Кроме того, на точку действует сила сопротивления среды, пропорциональная произведению скорости и времени (коэффициент пропорциональности равен k_1). Найдите зависимость скорости от времени. Указание: примените 2-й закон Ньютона.

Тема 6. Теория рядов.

198. Дайте понятие числового ряда, его суммы. Найдите сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(7/8)^n$.

199. Сформулируйте необходимый признака сходимости числового ряда. С его помощью покажите, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(1+1/n)^n$ расходится.

200. Используя простейшие свойства числовых рядов найдите сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3^n}-\frac{1}{4^n}\right)$.

201. Даны ряды с положительными членами: $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ (1) и $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ (2), $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{2}$. С помощью признаков сходимости знакоположительных рядов установите какое из нижеследующих утверждений справедливо: A) ряд (2) сходится, если $b_n=na_n$; B) ряд (2) расходится, если $b_n>a_n,\ n\geq 10$; C) ряд (2) расходится, если $b_n=3^n a_n$; D) ряд (2) сходится, если $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$.

202. Что такое знакочередующийся ряд? знакопеременный ряд? абсолютная и условная сходимость знакопеременного ряда? Сформулируйте признак Лейбница. Какие из перечисленных ниже рядов условно сходятся: A) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\cos\pi n}{n\ln n}$; B) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$; C) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

203. Дайте понятие функционального ряда, его области сходимости. Найдите области сходимости функциональных рядов: а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(x+3)^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\sqrt{x}}}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^x}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}n^{1+x-x^2}$.

204. Дайте понятие мажорируемого функционального ряда. Найдите все значения x, при которых ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2}$ сходится абсолютно.

205. Сформулируйте свойства мажорируемых функциональных рядов. Можно ли почленно дифференцировать ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n^2x}{n^2+1}$? Ответ обосновать.

206. Что такое степенной ряд? Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n$ расходится в точке $x_0=-2$. С помощью теоремы Абеля установите, какое из следующих утверждений справедливо: A) этот ряд сходится абсолютно в точке $x_1=-1$; B) этот ряд сходится в точке $x_2=0$; C) этот ряд расходится в точке $x_3=3$; D) нет правильного ответа.

207. Найдите области сходимости степенных рядов: а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2 2^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n3^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^{2n}}{n4^n}$.

208. Что значит разложить функцию в степенной ряд? Зависят ли коэффициенты такого разложения от способа его получения? Ряды Тейлора и Маклорена. Разложив в ряд Маклорена функцию $f(x)=x/(1+x^2)$, найдите $f^{(2n+1)}(0)$.

209. Разложите функцию в ряд по степеням x и укажите область сходимости полученного ряда: а) e^{-x^2}; б) $\ln(x^2+3x+2)$; в) $\int_0^x\frac{\sin 2t}{t}\,dt$.

210. Разложите функцию $y=\operatorname{tg}x$ в ряд Тейлора по степеням $(x-\pi/4)$, выписав первые 3 члена, отличные от нуля.

211. Вычислите приближённо с точностью до 10^{-3}, оценив погрешность по признаку Лейбница для знакочередующегося ряда: $\int_0^{0,5}e^{-x^2}\,dx$.

212. Выпишите два первых, отличных от нуля члена разложения в ряд по степеням x решения уравнения $y''=2xy'+4y$, удовлетворяющего начальным условиям $y(0)=0$, $y'(0)=1$.

213. Какие из следующих пар функций $f(x)$ и $g(x)$ ортогональны на промежутке $[-1,1]$: а) $f(x)=x$ и $g(x)=x^3-1$; б) $f(x)=x$ и $g(x)=x^2-1$; в) $f(x)=x^2$ и $g(x)=x^2-1$?

214. Сформулируйте условия Дирихле разложимости функции в ряд Фурье на промежутке $[-\pi,\pi]$.

215. Напишите формулы для коэффициентов ряда Фурье функции $f(x)$, разложенной в этот ряд в промежутках: а) $[-\pi,\pi]$; б) $[-l,l]$.

216. Напишите ряд Фурье нечётной функции $f(x)$, заданной на промежутке $[-\pi,\pi]$.

217. Функция $f(x)$ в промежутке $[0,\pi]$ разложена в ряд Фурье а) по косинусам; б) по синусам. Напишите формулы для коэффициентов обоих рядов.

218. Функция $f(x)=-1-x^2$ в промежутке $[-2,0]$ разложена в ряд Фурье по синусам. Напишите формулы для коэффициентов ряда. Постройте график суммы этого ряда.

219. Разложите в ряд Фурье функцию $y=|x|$ в промежутках: а) $[-\pi;\pi]$; б) $[0;2\pi]$; в) $[-1;1]$. Постройте графики функции и сумм этих рядов.

220. Разложите в ряд Фурье функцию $y=\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}$ в промежутке $[0;\pi]$: а) по синусам; б) по косинусам. Постройте графики функции и сумм рядов.

Тема 7. Кратные и поверхностные интегралы.

221. Интегрируема ли функция $1/(x-y)$ по квадрату $0\le x\le 1, 0\le y\le 1$?

222. Не вычисляя интеграла $\iint_D \ln(1-\sin(x+y))dxdy$, установите его знак, если $D=\{(x,y):\ \ x\ge 0,\ y\ge 0,\ x+y\le \pi/6\}$.

223. Сведите двойной интеграл $\iint_D f(x,y)\,dxdy$ к повторному двумя способами, если: а) (D) – область, ограниченная линиями $y=3x^2$, $y=6-3x$; б) (D) – трапеция с вершинами $(-1,\ 4)$, $(5,\ 4)$, $(1,\ 1)$, $(4,\ 1)$.

224. Измените порядок интегрирования в интеграле: $\int_{-2}^{-1}dx\int_{-\sqrt{-x^2-2x}}^{0}f(x,y)dy+\int_{-1}^{0}dx\int_{x}^{0}f(x,y)dy$ и.

225. Найдите среднее значение $f(x,y)=x+2y$по прямоугольнику, ограниченному прямыми $x=1$, $y=2$ и осями координат.

226. Изобразите на плоскости Oxy образ фигуры $G'=\{(r,\phi):\ \ 2\le r\le 3,\ 0\le\phi\le\pi/4\}$ при отображении $x=r\cos\phi,\quad y=r\sin\phi$. Является ли это отображение взаимно однозначным?

227. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями: а) $xy=4$, $x+y=5$; б) $(x^2+y^2)=8xy$, $x^2+y^2=1$ $(x^2+y^2\le 1)$.

228. Найдите объём тела, ограниченного поверхностями $z=\ln(1+x^2+y^2)$, $z=0$, $x^2+y^2=2$.

Критерии и шкала оценивания по оценочному средству «фронтальный и индивидуальный опрос»

Шкала оценивания	Критерий оценивания
отлично (5)	Студент глубоко и в полном объёме владеет программным материалом. Грамотно, исчерпывающе и логично его излагает в устной или письменной форме. При этом знает рекомендованную литературу, проявляет творческий подход в ответах на вопросы и правильно обосновывает принятые решения, хорошо владеет умениями и навыками при выполнении практических задач.

хорошо (4)	Студент знает программный материал, грамотно и по сути излагает его в устной или письменной форме, допуская незначительные неточности в утверждениях, трактовках, определениях и категориях или незначительное количество ошибок. При этом владеет необходимыми умениями и навыками при выполнении практических задач.
удовлетворительно (3)	Студент знает только основной программный материал, допускает неточности, недостаточно чёткие формулировки, непоследовательность в ответах, излагаемых в устной или письменной форме. При этом недостаточно владеет умениями и навыками при выполнении практических задач. Допускает до 30% ошибок в излагаемых ответах.
неудовлетворительно (2)	Студент не знает значительной части программного материала. При этом допускает принципиальные ошибки в доказательствах, в трактовке понятий и категорий, проявляет низкую культуру знаний, не владеет основными умениями и навыками при выполнении практических задач. Студент отказывается от ответов на дополнительные вопросы

Типовые варианты контрольных работ:

Тема 1. Линейная алгебра.

Вариант № 0

1. Решить систему линейных уравнений методом Крамера

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11 \end{cases}$$

2. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}$$

3. Решить систему линейных уравнений матричным методом

$$\begin{cases} 1x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 20 \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 6 \end{cases}$$

4. Найти матрицу, обратную к данной

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

5. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9 \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 4 \\ 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 18 \end{cases}$$

Тема 2. Аналитическая геометрия.

Вариант № 0

Даны координаты вершин пирамиды $ABCD$:

$$A=\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}6\\1\\-1\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}4\\8\\-9\end{pmatrix}\qquad D=\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$$

Найти:

1) длины ребер AB, AC, AD.;

2) угол между ребрами AB и AC;

3) угол между ребром AD и основанием ABC;

4) Вычислить площадь основания ABC;

5) Вычислить объем пирамиды $ABCD$;

6) Зная объём пирамиды и площадь её основания ABC, найти высоту h пирамиды $ABCD$;

7) Найти уравнение плоскости основания ABC, которая проходит через точки A, B и C.

8) Составить канонические уравнения прямой, которая проходит через вершину D перпендикулярно к плоскости основания Q;

9) Найти точку K пересечения полученной прямой с плоскостью основания Q;

10) Найти расстояние от вершины D пирамиды до плоскости основания Q и сравнить полученный результат с длиной вектора DK.

Тема 3. Математический анализ («Введение в математический анализ», семестр 1).

Вариант № 0

1. Найти область определения заданных функций.

$$y=\sqrt{\frac{x+2}{1-3x}+\frac{1}{x^2}}\qquad\qquad y=\frac{\ln(1+x)}{x-1}$$

2. Найти пределы.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^5+2x^4-3x+1}{2x^3+4x^2+3x-8}\qquad\qquad \lim_{x\to 3}\frac{2x^2-7x+3}{x^2-8x+15}$$

3. Используя замечательные пределы, вычислить:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{3x^2}\qquad\qquad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+3}{3x+5}\right)^{2x+4}$$

4. Найти пределы, используя эквивалентные бесконечно малые функции.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x^2)}{x^3-5x^2}\qquad\qquad \lim_{x\to 0}\frac{(e^{5x}-1)}{x}$$

5. Исследовать функцию на непрерывность, найти точки разрыва функции и установить их характер. Сделать схематический чертеж.

$$f(x) = 2^{\frac{1}{x-3}} + 1$$

$$\begin{cases} x+4; \ \ x < -1 \\ x^2+2; \ -1 \le x < 1 \\ 2x; \ x \ge 1 \end{cases}$$

Тема 3. Математический анализ («Неопределенный интеграл», семестр 2).

Вариант № 0

1. Найти неопределенный интеграл, используя таблицу и его основные свойства.

$$\int \left(x^{3/4} + 5x\sqrt{x} + \sqrt[8]{x} - \frac{1}{\sqrt[8]{x^2}} \right) dx \qquad \int \frac{4dx}{x-4}$$

2. Найти неопределенный интеграл, используя метод формирования специального выражения под знаком дифференциала.

$$\int (x^2-3)^4 2x dx \qquad \int \sqrt{x^2-3x+5}(2x-3)dx$$

3. Найти неопределенный интеграл, используя метод замены переменных и метод интегрирования по частям

$$\int \left(4^{2x} - x^2 5^{x^3}\right) dx \qquad \int \frac{\ln x}{x^2} dx$$

4. Найти неопределенный интеграл от дробно-рациональной функции

$$\int \frac{(8x^3+2x^2+4x-1)dx}{x-1} \qquad \int \frac{12}{x^2+7x+15} dx$$

5. Найти неопределенный интеграл от тригонометрических функций

$$\int \sin 2x \cdot \cos 4x dx \qquad \int \cos\frac{2-5x}{3} \sin\frac{\pi}{3} dx$$

Тема 3. Математический анализ («Определенный интеграл», семестр 2).

Вариант № 0

1. Вычислить определенный интеграл:

$$\int_0^1 \frac{x^2+1}{(x^3+3x+1)^2} dx$$

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченную линиями:

$y = x^2,$
$y = 2 - x^2$

$\begin{cases} x = 8\cos^3 t \\ y = 2\sin^3 t \end{cases}'$
$0 \le t \le \frac{\pi}{2}$

$\rho = 2\cos 2\varphi.$
$0 \le t \le \frac{\pi}{2}$

3. Вычислить длину дуги кривой:

$y = -\ln(\cos x),$
$0 \le x \le \frac{\pi}{6}$

$\begin{cases} x = 3(t - \sin t) \\ y = 3(1 - \cos t) \end{cases}'$
$\frac{\pi}{2} \le t \le \pi$

$\rho = 2\cos\varphi,$
$0 \le \varphi \le \frac{\pi}{3}.$

4. Вычислить объем (задача а) и площадь поверхности вращения (задача б) тела, полученного вращением заданной фигуры вокруг оси Ox:

а) $y = x^3, y = \sqrt{x}.$

б) $y = 1 - x;$
$x = 0; \quad x = 1$

5. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость

$$\int_0^\infty xe^{-x^2}\,dx$$

Тема 5. Дифференциальные уравнения.

Вариант № 0

1. Найти общее решение или решить задачу Коши для дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными:

$xy' - y\ln y = 0$

$y' = 2\sqrt{y},$
$y(0) = 1.$

2. Найти общее решение или решить задачу Коши для однородных дифференциальных уравнений первого порядка.

$xy^2y' - (x^3 + y^3) = 0;$

$ydx + 2\left(\sqrt{xy} - x\right)dy = 0$
$y(1) = 1$

3. Найти общие решения линейных дифференциальных уравнений первого порядка:

$y' + tgxy = -\cos x;$

$y' + \frac{2y}{x} = \frac{e^{-x^2}}{x}.$

4. Найти общее решение или решить задачу Коши для дифференциальных уравнений второго порядка, допускающих понижение порядка

$y'' - \cos 6x = \dfrac{2}{\sqrt{x}};$ $\qquad$ $y'' - \dfrac{2x}{x^2+1}y' = 0;$

5. Найти решения линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами

$y'' + 2y' = 0;$ $\qquad$ $y'' - 2y' - 3y = e^{4x};$

Тема 6. Теория рядов.

Вариант № 0

1.Запишите формулу общего члена ряда.

$$\frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{6}{27} + \frac{8}{81} + \ldots$$

2.Доказать расходимость ряда, пользуясь необходимым признаком сравнения.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2n}$$

3.Исследовать ряд на сходимость, применяя достаточные признаки сходимости рядов.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n!}{n^n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln^5(n+1)}$$

4.Исследовать ряды на абсолютную сходимость.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3n+1}{7n^2-2}$$

5.Найти интервал сходимости степенного ряда.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^n}(x+2)^n$$

Тема 7. Кратные и поверхностные интегралы.

Вариант № 0

1. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле и сделать чертеж области интегрирования

$$\int_{-1}^{0} dx \int_{-8x^2}^{-2x+6} f(x,y)dy \qquad \int_{-2}^{-1} dy \int_{-\sqrt{2+y}}^{0} f dx + \int_{-1}^{0} dy \int_{-\sqrt{-y}}^{0} f dx$$

2. Вычислить двойной интеграл по области D

$$\iint_D (12x^2y^2 + 16x^3y^3)dxdy;$$
$D: x = 1, y = x^2, y = -\sqrt{x}.$

$$\iint_D ye^{xy/2}dxdy;$$
$D: y = \ln 2, y = \ln 3, x = 2, x = 4.$

3. Вычислить интегралы, перейдя от декартовых координат к полярным:

$$\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}dy$$

4. С помощью двойного интеграла вычислить площадь плоских фигур, ограниченных данными линиями

$y = 3/x, y = 4e^x, y = 3, y = 4.$

$y^2 - 2y + x^2 = 0,$
$y^2 - 4y + x^2 = 0,$
$y = x/\sqrt{3}, y = \sqrt{3}x.$

5. Пластинка D задана неравенствами, μ - поверхностная плотность. Найти массу пластинки.

$D: x = 1, y = 0, y^2 = 4x (y \geq 0);$
$\mu = 7x^2 + y.$

$D: x^2 + y^2/4 \leq 1;$
$\mu = y^2.$

6. Найти координаты центра тяжести плоских однородных пластин, ограниченных заданными линиями

$x^2 + y^2 = 4, \quad x \geq 0, \qquad y \geq 0$

7. Вычислить тройной интеграл по области V

$$\iiint_V 2y^2e^{xy}dxdydz;$$
$$V \begin{cases} x = 0, y = 1, y = x, \\ z = 0, z = 1. \end{cases}$$

$$\iiint_V xdxdydz;$$
$V: y = 10x, y = 0, x = 1,$
$z = xy, z = 0.$

8. С помощью тройного интеграла найти объем тела, ограниченного заданными поверхностями

$y = 16\sqrt{2x}, y = \sqrt{2x},$
$z = 0, x + z = 2.$

$x^2 + y^2 = 2y,$
$z = 5/4 - x^2, z = 0.$

Критерии и шкала оценивания по оценочному средству «контрольная работа»

Шкала оценивания	Критерий оценивания
5	Контрольная работа выполнена на высоком уровне (правильные

	ответы даны на 90-100% вопросов/задач)
4	Контрольная работа выполнена на среднем уровне (правильные ответы даны на 75-89% вопросов/задач)
3	Контрольная работа выполнена на низком уровне (правильные ответы даны на 50-74% вопросов/задач)
2	Контрольная работа выполнена на неудовлетворительном уровне (правильные ответы даны менее чем на 50%)

Типовые варианты индивидуальных заданий:

Семестр 1.

Вариант № 0

1. Даны координаты вершин треугольника ABC:

$$A(-8;\ -3);\ B(4;\ -12);\ C(8;\ 10).$$

Необходимо найти:

- длину стороны AB;
- уравнение сторон AB и BC и их угловые коэффициенты;
- угол ψ между прямыми AB и BC в радианах;
- уравнение высоты CD и ее длину;
- уравнение медианы AE и координаты точки Kпересечения этой медианы с высотой CD;
- уравнение прямойL, которая проходит через точку K параллельно к стороне AB;
- координаты точки $F(x_F, y_F)$, которая находится симметрично точке A относительно прямой CD.

2. Дано: точка $A(2;\ 5)$ и прямая $y = 1$. Необходимо составить уравнение геометрического места точек, равноудаленных от заданной токи $A(x_A, y_A)$ и прямой $y = d$.
Полученное уравнение привести к простейшему виду и построить график кривой.

3. Заданы две системы линейных уравнений. Решить первую систему методом Крамера. Полученный при решении первой системы результат проверить с помощью метода обратной матрицы. Вторую систему решить с помощью метода Гаусса.

$\begin{cases}3x_1 + 2x_2 - 1x_3 = 11,\\ 4x_1 - 1x_2 + 4x_3 = -10,\\ 1x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 9\end{cases}$	$\begin{cases}1x_1 + 2x_2 - 1x_3 = 1,\\ 3x_1 + 5x_2 - 1x_3 = 1,\\ 4x_1 + 7x_2 - 2x_3 = 2\end{cases}$

4. Даны координаты вершин пирамиды $ABCD$:

$$A(2;\ -3;\ 1),\ B(6;\ 1;\ -1),\ C(4;\ 8; -9),\ D(2;\ -1;\ 2).$$

Необходимо.

- Записать векторы$\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$ в ортонормальной системе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ и найти модули этих векторов.
- Найти угол между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$.
- Найти проекцию вектора $\overline{AD}$ на вектор $\overline{AB}$.
- Вычислить площадь грани ABC.
- Найти объем пирамиды $ABCD$.

5. Даны координаты четырех точек:

$$A(-3;\ -2;\ -4),\ B(-4;\ 2;\ -7),\ C(5;\ 0;\ 3), M(-1;\ 3;\ 0).$$

Необходимо.

– Составить уравнение плоскости Q, которая проходит через точки A, B и C.
– Составить канонические уравнения прямой, которая проходит через точку M перпендикулярно к плоскости Q.
– Найти точки пересечения полученной прямой с плоскостью Q и с координатными плоскостями XOY, XOZ, YOZ.
– Найти расстояние от точки M до плоскости Q.

6. Вычислить следующие пределы (не пользуясь правилом Лопиталя).

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-2x^2+3}{4x^2+3x+2}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+2}{3x^2+2x-1}$	$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-3x-2}{x^2+3x+10}$
$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2+8x+5}{3x^2+9x+6}$	$\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sqrt{x+4}-1}{x^2-9}$	$\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{x^2}$;	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{tg 2x}$	$\lim\limits_{x\to 0}(1+4x)^{\frac{2}{x}}$
	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x-1}{x+3}\right)^{x+2}$	

7. Заданную функцию $y=f(x)$ исследовать на непрерывность и выяснить характер точек разрыва. Сделать схематический график

$f(x)=4^{\frac{1}{2-x}}$	$f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{если } x<0 \\ \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}, & \text{если } 0\le x\le\dfrac{\pi}{2} \\ 1, & \text{если } x>\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

8. Найти первую производную y'_x заданных функций:

$y=\dfrac{2(3x^3+4x^2-x-2)}{15\sqrt{x+1}}$	$y=x-\ln\left(2+e^x+2\sqrt{e^{2x}+e^x+1}\right)$
$y=\operatorname{arctg}\left(\dfrac{\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x}{\sqrt{2}}\right)$	$y=\sin\sqrt{3}+\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{\sin^2 3x}{\cos 6x}$

9. Найти первую производную y'_x заданных функций:

$y=(\operatorname{arctg}x)^{(1/2)\ln(\operatorname{arctg}x)}$	$y=x\cdot e^y$	$\begin{cases} x=\dfrac{3t^2+1}{3t^3}, \\ y=\sin\left(\dfrac{t^3}{3}+t\right) \end{cases}$

10. Дана функция $y = f(x)$ и два значения аргумента x_1 и x_2. Необходимо найти приближенное значение данной функции при $x = x_2$, используя ее значение при $x = x_1$ и заменяя прирост Δy функции $y = f(x)$ соответствующим дифференциалом dy:

$y = \sqrt[3]{3x^2 + 8x - 16}$; $x_1 = 4$; $x_2 = 3{,}94$	$y = \cos(x)$; $x_1 = 60^\circ$; $x_2 = 63^\circ$.

11. Выполнить полное исследование заданных функций и построить их графики:

$y = \dfrac{x^3 + 4}{x^2}$	$y = \dfrac{e^{2x}}{2x}$	$y = x^3 - 3x^2 + 3$

12. Используя методы дифференциального вычисления, решить следующие физические задачи:

1. При подготовке к экзамену студент за t дней изучает $\left(\frac{t}{t+k}\right)$-ю часть курса и забывает $(\alpha \cdot t)$-ю часть. Сколько дней нужно потратить на подготовку, чтобы была изучена максимальная часть курса? Решить задачу при условии, что $k = 3\alpha = 1/48$.
2. Тело массой $m_0 = 3000$ кг падает с высоты H метров и теряет массу (сгорает) пропорционально времени падения. Коэффициент пропорциональности $k = 100$ кг/с. Считая, что начальная скорость $V_0 = 0$, ускорение $g = 10$ м/с, найти наибольшую кинетическую энергию тела. Решить задачу при условии, что $H = 1805$ м.

Семестр 2.

Вариант № 0

1. Вычислить неопределенные интегралы:

$\displaystyle\int \frac{7x^3 + 40x - 96}{2x^4 + 5x^3 - 12x^2}dx$;	$\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 16}}$;	$\displaystyle\int x^2 \cos 4x dx$.

2. Вычислить определенный интеграл:

$$\int_0^3 \frac{4x dx}{\sqrt[3]{(3x-8)^2} - 2\sqrt[3]{3x-8} + 4}.$$

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболами:

$y = \dfrac{x^2}{2} - x + 1$	$y = -\dfrac{x^2}{2} + 3x + 6$

4. Вычислить несобственный интеграл, или установить его расходимость:

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2 + 4x + 13}.$$

5. Исследовать функцию $z = f(x, y)$ на экстремум:_

$z = xy - x^2 - 2y^2 + x + 10y - 8.$

6. Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения:

$$y' = \frac{8x + 5y}{5x - 2y}.$$

7. Дано дифференциальное уравнение второго порядка, которое допускает понижение порядка. Найти частное решение, которое удовлетворяет заданным начальным условиям.

$$xy'' - y' - x^2 = 0,\ y(1) = {}^4/_3,\ y'(1) = 3.$$

8. Задано линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Найти частное решение, которое удовлетворяет приведенным начальным условиям.

$$y'' - 2y' - 8y = 16x^2 + 2,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 5.$$

9 Решить систему уравнений и найти частные решения, которые удовлетворяют приведенным начальным условиям.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y, \end{cases}$$
$$x(0) = 1,\ y(0) = 3.$$

Семестр 3.

Вариант № 0

1. Исследовать на сходимость числовой ряд:

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\left(\frac{2n+1}{2n-1}\right)^{n^2}$	$\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln^2(3n+1)}.$

2. Исследовать на абсолютную и условную сходимость числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{2^n}$$

3. Найти область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-2)^3(x+3)^{2n}}{2n+3}.$$

4. Вычислить интеграл

$$\int_0^{0,1} e^{-6x^2}\,dx$$

с точностью до 0,001.

5. Найти первые четыре ненулевые члена разложения в ряд решения дифференциального уравнения

$$y'' + 2y' - xy = x^2, y(0) = 0, y'(0) = 1.$$

6. Изменить порядок интегрирования

$$\int_{-2}^{-1} dy \int_{-\sqrt{2+y}}^{0} f dx + \int_{-1}^{0} dy \int_{-\sqrt{-y}}^{0} f dx \ .$$

7. С помощью двойного интеграла найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 3/x, \quad y = 4e^x, \quad y = 3, \quad y = 4.$

8. С помощью тройного интеграла найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$x^2 + y^2 = 2y, z = 5/4 - x^2, \quad z = 0 \ .$$

9. Тело V задано поверхностями, что его ограничивают, μ– удельная плотность. Найти массу тела.

$V: 64(x^2 + y^2) = z^2, \quad x^2 + y^2 = 4, \quad y = 0, \quad z = 0 \ (y \geq 0, \quad z \geq 0);$

$\mu = \dfrac{5(x^2 + y^2)}{4}.$

10. Найти работу силы $\vec{F} = (x^2 - 2y)\vec{i} + (y^2 - 2x)\vec{j}$, при перемещении вдоль линии L: отрезок MN, от точки $M(-4; \ 0)$ к точке $N(0; \ 2)$.

11. Найти поток векторного поля $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, через часть плоскости $P\colon \ x + y + z = 1$, размещенную в первом октанте (нормаль образует острый угол с осью OZ).

12. Найти поток векторного поля $\vec{F} = (e^z + 2x)\vec{i} + e^x\vec{j} + e^y\vec{k}$ через замкнутую поверхность $S\colon \ x + y + z = 1, \ x = 0, \ y = 0, \ z = 0$ (нормаль внешняя).

Критерии и шкала оценивания по оценочному средству «индивидуальные задания»

Шкала оценивания (интервал баллов)	Критерий оценивания
Зачтено	Правильно решены 90-100% заданий
Не зачтено	Правильно решены менее 90% заданий

Оценочные средства для промежуточной аттестации (экзамен)

Типовой билет. Семестр 1.

Билет № 0

1. Произведения векторов. 1 балл

2. Решить систему линейных алгебраических уравнений 1 балл

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 8 \\ 2x_1 - 4x_2 - 3x_3 = -1 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

3. Заданы координаты вершин треугольника 1 балл
$A_1(3;1;4), A_2(-1;6;1), A_3(-1;1;6)$. Найти:

а) векторы $\vec{c} = \overrightarrow{A_1A_2}$ и $\vec{d} = \overrightarrow{A_1A_3}$;

б) длины векторов $\vec{c}$ и $\vec{d}$;

в) скалярное произведение векторов $\vec{c}\,\vec{d}$;

д) угол между векторами $\vec{c}$ и $\vec{d}$;

е) векторное произведение $\vec{c} \times \vec{d}$;

ж) площадь треугольника $A_1A_2A_3$.

4. Найти производную 1 балл
$y = (x^2 + x + 1) \cdot \mathrm{tg}(2x)$

5. Провести полное исследование функции и построить график 1 балл

$$y = \frac{e^{2(x+1)}}{2(x+1)}$$

Утверждено на заседании кафедры ПМ, протокол №__ от ______ 20__ г.

Заведующий кафедрой *доц. Малый В.В.*

Лектор

Типовой билет. Семестр 2.

Билет № 0

Часть I. Теоретический вопрос.
(Полностью раскрытый вопрос оценивается в 1 балл).
1. Понятие первообразной

Часть II. Задание начального уровня сложности.
(Правильно выполненное задание оценивается в 2 балла).

1. Найти решения уравнений

$$y'' + 3y' = 0.$$

2. Вычислить неопределенный интеграл

$$\int (x^2 + 2x + 3)dx$$

Часть III. Задание базового уровня сложности.
(Правильно выполненное задание оценивается в 1 балл).
3. Проинтегрировать рациональную дробь

$$\int \frac{(2x + 16)dx}{(x + 1)(x^2 + 4x + 13)} dx$$

4. Для функции $u = 5x^2y - 3xy + x^3$ найти градиент и производную в точке A по направлению вектора $\vec{s} = \overrightarrow{AB}$: $A(1; 2; -1)$, $B(3; -1; 0)$.

Часть IV. Задание повышенного уровня сложности.
(Правильно выполненное задание – 1 балл).
1. Найти решения уравнений

$$y'' + 3y' = 3xe^{-3x};$$

Утверждено на заседании кафедры ПМ, протокол №__ от ______ 20__ г.

Заведующий кафедрой *доц. Малый В.В.*

Лектор

Типовой билет. Семестр 3.

Билет № 0

1. Сходимость и сумма ряда. Необходимое условие сходимости. 1 балл

2. Исследовать на сходимость ряд 2 балла

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{n^2+5n-7}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!\ 2^n}{(n+1)^n}$$

3. Изменить порядок интегрирования. Область интегрирования изобразить на чертеже 1 балл

$$\int_0^2 dx \int_{\frac{1}{4}x^2}^{2\sqrt{x}} f(x,y)\,dy$$

4. Вычислить криволинейный интеграл вдоль кривой L, при изменении параметра от t_1 до t_2: 1 балл

$$\int_L dx+dy;\ \text{где}\ \ L:\ y=-\sqrt{2-t};\ \ t_1=1,\ \ t_2=2$$

Утверждено на заседании кафедры ПМ, протокол №__ от ______ 20__ г.

Заведующий кафедрой *доц. Малый В.В.*

Лектор

Критерии и шкала оценивания по оценочному средству промежуточный контроль (экзамен)

Шкала оценивания	Критерий оценивания
отлично (5)	Студент глубоко и в полном объёме владеет программным материалом. Грамотно, исчерпывающе и логично его излагает в устной или письменной форме. При этом знает рекомендованную литературу, проявляет творческий подход в ответах на вопросы и правильно обосновывает принятые решения, хорошо владеет умениями и навыками при выполнении практических задач.
хорошо (4)	Студент знает программный материал, грамотно и по сути излагает его в устной или письменной форме, допуская незначительные неточности в утверждениях, трактовках, определениях и категориях или незначительное количество ошибок. При этом владеет необходимыми умениями и навыками при выполнении практических задач.
удовлетворительно (3)	Студент знает только основной программный материал, допускает неточности, недостаточно чёткие формулировки,

	непоследовательность в ответах, излагаемых в устной или письменной форме. При этом недостаточно владеет умениями и навыками при выполнении практических задач. Допускает до 30% ошибок в излагаемых ответах.
неудовлетворительно (2)	Студент не знает значительной части программного материала. При этом допускает принципиальные ошибки в доказательствах, в трактовке понятий и категорий, проявляет низкую культуру знаний, не владеет основными умениями и навыками при выполнении практических задач. Студент отказывается от ответов на дополнительные вопросы

Лист изменений и дополнений

№ п/п	Виды дополнений и изменений	Дата и номер протокола заседания кафедры (кафедр), на котором были рассмотрены и одобрены изменения и дополнения	Подпись (с расшифровкой) заведующего кафедрой (заведующих кафедрами)

Экспертное заключение

Представленный фонд оценочных средств (далее - ФОС) по дисциплине «Высшая математика» соответствует требованиям ФГОС ВО.

Предлагаемые формы и средства текущего и промежуточного контроля адекватны целям и задачам реализации основной профессиональной образовательной программы по направлению подготовки 12.03.01 Приборостроение.

Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины представлены в полном объеме.

Виды оценочных средств, включенные в представленный фонд, отвечают основным принципам формирования ФОС.

Разработанный и представленный для экспертизы фонд оценочных средств рекомендуется к использованию в процессе подготовки обучающихся, по указанному направлению.

Председатель учебно-методической комиссии факультета компьютерных систем и информационных технологий Н.Н. Ветрова