

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Луганский национальный университет имени Владимира Даля»

Институт технологий и инженерной механики
Кафедра технологии машиностроения и инженерного консалтинга

УТВЕРЖДАЮ

Директор института технологий и
инженерной механики



Могильная Е.П.

09 2023 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

«ВВЕДЕНИЕ В ТЕНЗОРНЫЙ АНАЛИЗ»

По направлению подготовки 15.03.01 Машиностроение

Профиль: «Технологии прототипирования машиностроительных объектов»

Луганск - 2023

Лист согласования РПУД

Рабочая программа учебной дисциплины «Введение в тензорный анализ» по направлению подготовки 15.03.01 Машиностроение. – 21 с.

Рабочая программа учебной дисциплины «Введение в тензорный анализ» составлена с учетом Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования по направлению подготовки 15.03.01 Машиностроение, утвержденного приказом Министерства науки и высшего образования Российской Федерации от «9» августа 2021 года № 727.

СОСТАВИТЕЛЬ:

канд. техн. наук, доцент Киреев И.Ю.

Рабочая программа дисциплины утверждена на заседании кафедры технологии машиностроения и инженерного консалтинга «5» 09 2023 года, протокол № 1

Заведующий кафедрой технологии машиностроения
и инженерного консалтинга Ясуник С.Н. Ясуник С.Н.

Переутверждена: « » 20 г., протокол №

Рекомендована на заседании учебно-методической комиссии института технологий и инженерной механики «12» 09 2023 года, протокол № 1

Председатель учебно-методической комиссии
института технологий и инженерной механики Ясуник С.Н. Ясуник С.Н.

© Киреев И.Ю., 2023 год

© ФГБОУ ВО «ЛГУ им. В. Даля», 2023 год

Структура и содержание дисциплины

1. Цели и задачи дисциплины, ее место в учебном процессе

Цель изучения дисциплины – Формирование у будущих инженеро-машиностроителей систематических знаний о математическом аппарате тензорного исчисления и выработка умений применять его для описания и решения прикладных задач механики деформируемого твердого тела и технологии прототипирования.

Задачи: Усвоить основные понятия и определения тензорного анализа и сформировать навыки операций над тензорами в различных системах координат. Освоить применение тензорного аппарата для описания напряженно-деформированного состояния материалов, научившись записывать основные законы механики в инвариантной тензорной форме

2. Место дисциплины в структуре ООП ВО.

Дисциплина «Введение в тензорный анализ» входит в часть, формируемую участниками образовательных отношений. Она базируется на знаниях и компетенциях, полученных студентами при изучении следующих дисциплин: "Математика" (линейная алгебра, аналитическая геометрия), "Физика" (разделы "Механика", "Информатика и информационные технологии").

Является основой для успешного освоения таких дисциплин, как: "Теоретическая механика" (раздел "Механика сплошных сред"), "Сопротивление материалов", "Компьютерное моделирование объектов профессиональной деятельности", "Аналитическая механика" "Прототипирование машиностроительных объектов".

3. Требования к результатам освоения содержания дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижений компетенции (по реализуемой дисциплине)	Перечень планируемых результатов
ОПК-1 — Способен применять естественнонаучные и общетехнические знания, методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования в профессиональной деятельности.	ОПК-1.1 Знать основные законы, теории и методы естественнонаучных и общетехнических дисциплин, основы методов математического анализа и моделирования.	Знать • Основные понятия тензорной алгебры: определение тензора, метрический тензор, операции над тензорами. • Основы тензорного анализа: ковариантное дифференцирование, символы Кристоффеля. • Правила преобразования тензорных величин при переходе между системами координат.
	ОПК-1.2 Уметь применять методы математического анализа и моделирования для	Уметь: Выполнять вычисления с тензорами в ортогональных криволинейных системах координат. • Записывать основные дифференциальные операторы

	решения профессиональных задач.	(градиент, дивергенция, ротор) в тензорной форме. • Применять аппарат тензорного анализа для описания напряженно-деформированного состояния материалов.
	ОПК-1.3 Владеть навыками применения методов математического анализа и моделирования.	Владеть: • Навыками тензорной записи фундаментальных законов механики сплошной среды. • Методами анализа симметрии физических величин и уравнений в тензорной форме.

4. Структура и содержание дисциплины

4.1. Объем учебной дисциплины и виды учебной работы

Вид учебной работы	Объем часов (зач. ед.)	
	Очная форма	Заочная форма
Общая учебная нагрузка (всего)	180 (5,0 зач. ед)	180 (5,0 зач. ед)
Обязательная аудиторная учебная нагрузка (всего) в том числе:	68	12
Лекции	34	6
Семинарские занятия	-	-
Практические занятия	-	-
Лабораторные работы	34	6
Курсовой проект	-	-
Другие формы и методы организации образовательного процесса	4	-
Самостоятельная работа студента (всего)	108	168
Форма аттестации	зачет	зачет

4.2. Содержание разделов дисциплины

Тема 1. Введение.

Историческая справка. Роль тензорного исчисления в механике и физике. Примеры тензорных величин в машиностроении (тензор напряжений, тензор деформаций, тензор инерции).

Тема 2 Определение тензора.

Валентность (ранг) тензора. Примеры: скаляр (тензор 0-го ранга), вектор (тензор 1-го ранга).

Тема 3 Метрический тензор.

Преобразование координат. Ковариантные и контравариантные компоненты. Базисные векторы. Подъем и опускание индексов.

Тема 4. Алгебраические операции над тензорами

Сложение, умножение на скаляр, тензорное умножение, свертка.

Тема 5. Симметричные и антисимметричные тензоры.

Симметрия тензора напряжений.

Тема 6. Тензорные поля.

Производная от тензорного поля. Связность. Ковариантная производная.

Тема 7. Дифференциальные операции в тензорной форме

Градиент, дивергенция, ротор. Оператор Гамильтона (набла) в тензорной записи.

Тема 8. Приложения в механике.

Вывод уравнений равновесия в напряжениях в тензорной форме. Тензор деформаций Коши-Грина.

Тема 9. Обзор применения в современных САЕ-пакетах (на примере ANSYS, Comsol).

Анализ результатов моделирования (визуализация тензорных полей).

4.3. Лекции

№ п/п	Название темы	Объем часов	
		Очная форма	Заочная форма
1	Введение.	2	0,5
2	Определение тензора	4	0,5
3	Метрический тензор	4	0,5
4	Алгебраические операции над тензорами	4	0,5
5	Симметричные и антисимметричные тензоры	4	0,5
6	Тензорные поля	4	0,5
7	Дифференциальные операции в тензорной форме	4	1
8	Приложения в механике	4	1
9	Обзор применения в современных САЕ-пакетах (на примере ANSYS, Comsol).	4	1
Итого:		34	6

4.4. Лабораторные работы

№ п/п	Название темы	Объем часов	
		Очная форма	Заочная форма
1	Основы тензорной алгебры. Операции в различных системах координат.	4	1
2	Тензор деформаций. Анализ деформированного состояния элемента конструкции	5	1
3	Тензор напряжений. Определение главных напряжений и опасных точек.	5	1
4	Закон Гука в тензорной форме. Связь напряжений и деформаций для изотропного материала	5	1
5	Тензорный анализ геометрии поверхности. Расчет кривизны	5	1
6	Расчет на прочность простейшего элемента конструкции с использованием тензорного аппарата (комплексная работа)(Ч.1).	5	1
7	Расчет на прочность простейшего элемента конструкции с использованием тензорного аппарата (комплексная работа)(Ч.2)	5	
Итого:		34	6

4.5. Практические занятия

Практические работы учебным планом не предусмотрены.

4.6. Самостоятельная работа студентов

№ п/п	Название темы	Вид СРС	Объем часов	
			Очная форма	Заочная форма
1	Введение.	Поиск, анализ, структурирование и изучение информации по темам. Подготовка к зачету	18	30
2	Определение тензора		18	30
3	Метрический тензор		12	22
4	Алгебраические операции над тензорами		10	20
5	Симметричные и антисимметричные тензоры		18	30
6	Тензорные поля		16	18
7	Дифференциальные операции в тензорной форме		16	18
Итого:			76	168

4.7. Курсовые проекты. Учебным планом не предусмотрено выполнение курсового проекта.

5. Образовательные технологии

Для достижения планируемых результатов освоения дисциплины «Введение в тензорный анализ» используются следующие образовательные технологии:

- традиционные объяснительно-иллюстративные технологии, которые обеспечивают доступность учебного материала для большинства студентов, системность, отработанность организационных форм и привычных методов, относительно малые затраты времени;
- информационно-коммуникационная технология, в том числе визуализация, создание электронных учебных материалов;
- использование электронных образовательных ресурсов при подготовке к лекциям, практическим и лабораторным занятиям;
- технология проблемного обучения, в том числе в рамках разбора проблемных ситуаций;
- технология развивающего обучения, в том числе постановка и решение задач от менее сложных к более сложным, развивающих компетенции студентов.

В рамках перечисленных технологий основными методами обучения являются: работа в команде; самостоятельная работа; проблемное обучение.

6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины:

а) основная литература:

1. Димитриенко Ю.И. Тензорное исчисление: Учеб. пособие. – М.: Высш. шк., 2001. – 575 с.

2. Соколов А.И. Тензорный анализ. Теория и применения в геометрии и в механике сплошных сред: Учеб. пособие. – М.: Лань, 2019. – 224 с.

б) дополнительная литература:

1. Лурье А.И. Теория упругости. – М.: Наука, 1970. –Гл. 1-3.
2. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т.1. – М.: Наука, 1970. –Гл. 1.
3. Itskov M. Tensor Algebra and Tensor Analysis for Engineers. – Springer, 2015. (Англоязычный ресурс для углубленного изучения).

в) Интернет-ресурсы:

Пакеты символьной математики: Maple, Mathematica.

Системы компьютерной инженерии (CAE): ANSYS, Comsol Multiphysics (для демонстрации примеров).

Электронные образовательные ресурсы (курсы на Coursera, Stepik по тензорному анализу и механике)

.Электронные библиотечные системы и ресурсы

Электронно-библиотечная система «Консультант студента» – <http://www.studentlibrary.ru/cgi-bin/mb4x>

Электронно-библиотечная система «StudMed.ru» –<https://www.studmed.ru>

Научная электронная библиотека Elibrary – Режим доступа: URL: <http://elibrary.ru/>

Справочная правовая система «Консультант Плюс» – Режим доступа: URL: <https://www.consultant.ru/sys/>

Информационный ресурс библиотеки образовательной организации

Научная библиотека имени А. Н. Коняева – Режим доступа: URL: <http://biblio.dahluniver.ru/>

7. Материально-техническое и программное обеспечение дисциплины

Освоение дисциплины «Введение в тензорный анализ» предполагает использование академических аудиторий, соответствующих действующим санитарным и противопожарным правилам и нормам.

Прочее: рабочее место преподавателя, оснащенное компьютером с доступом в Интернет.

Программное обеспечение:

Функциональное назначение	Бесплатное программное обеспечение	Ссылки
Офисный пакет	Libre Office 6.3.1	https://www.libreoffice.org/ https://ru.wikipedia.org/wiki/LibreOffice
Операционная система	UBUNTU 19.04	https://ubuntu.com/ https://ru.wikipedia.org/wiki/Ubuntu
Браузер	Firefox Mozilla	http://www.mozilla.org/ru/firefox/fx
Браузер	Opera	http://www.opera.com
Почтовый клиент	Mozilla Thunderbird	http://www.mozilla.org/ru/thunderbird
Файл-менеджер	Far Manager	http://www.farmanager.com/download.php
Архиватор	7Zip	http://www.7-zip.org/

Графический редактор	GIMP (GNU Image Manipulation Program)	http://www.gimp.org/ http://gimp.ru/viewpage.php?page_id=8 http://ru.wikipedia.org/wiki/GIMP
Редактор PDF	PDFCreator	http://www.pdfforge.org/pdfcreator
Аудиоплеер	VLC	http://www.videolan.org/vlc/

8. Оценочные средства по дисциплине

Паспорт фонда оценочных средств по учебной дисциплине «Введение в тензорный анализ»

Перечень компетенций (элементов компетенций), формируемых в результате освоения учебной дисциплины (модуля) или практики

№ п / п	Код контролируемой компетенции	Формулировка контролируемой компетенции	Индикаторы достижений компетенции (по реализуемой дисциплине)	Контролируемые темы учебной дисциплины, практики	Этапы формирования (семестр изучения)
1	ОПК-1	Способен применять естественнонаучные и общеинженерные знания, методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования в профессиональной деятельности.	ОПК-1.1 Знать основные законы, теории и методы естественнонаучных и общеинженерных дисциплин, основы методов математического анализа и моделирования	Тема 1. Введение. Тема 2 Определение тензора. Тема 3 Метрический тензор. Тема 4. Алгебраические операции над тензорами Тема 5. Симметричные и антисимметричные тензоры.	5
			ОПК-1.2 Уметь применять методы математического анализа и моделирования для решения профессиональных задач.	Тема 3 Метрический тензор. Тема 4. Алгебраические операции над тензорами Тема 5. Симметричные и антисимметричные тензоры. Тема 6. Тензорные поля. Тема 7. Дифференциальные операции в тензорной форм	5

			ОПК-1.3 Владеть навыками применения методов математического анализа и моделирования .	Тема 5. Симметричные и антисимметричные тензоры. Тема 6. Тензорные поля. Тема 7. Дифференциальные операции в тензорной форме Тема 8. Приложения в механике. Тема 9. Обзор применения в современных САЕ-пакетах (на примере ANSYS, Comsol).	5
--	--	--	--	--	---

**Показатели и критерии оценивания компетенций,
описание шкал оценивания**

	Код и наименование компетенции	Индикаторы достижений компетенции (по реализуемой дисциплине)	Перечень планируемых результатов	Контролируемые Темы дисциплины	Наименование оценочного средства
1	ОПК-1 — Способен применять естественнонаучные и инженерные знания, методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования в профессиональной деятельности.	ОПК-1.1 Знать основные законы, теории и методы естественнонаучных и инженерных дисциплин, основы методов математического анализа и моделирования .	Знать • Основные понятия тензорной алгебры: определение тензора, метрический тензор, операции над тензорами. • Основы тензорного анализа: ковариантное дифференцирование, символы Кристоффеля. • Правила преобразования тензорных величин при переходе между системами координат.	Тема 1 Тема 2 Тема 3 Тема 4 Тема 5	Вопросы для комбинированного контроля усвоения теоретического материала (устно или письменно), задания к лабораторным работам, тест, реферат, зачет
2		ОПК-1.2 Уметь применять методы математического анализа и моделирования для решения	Уметь: Выполнять вычисления с тензорами в ортогональных криволинейных системах координат. • Записывать основные		Вопросы для комбинированного контроля усвоения теоретического материала

		профессиональных задач.	дифференциальные операторы (градиент, дивергенция, ротор) в тензорной форме. • Применять аппарат тензорного анализа для описания напряженно-деформированного состояния материалов.		(устно или письменно), задания к лабораторным работам, тест, реферат, зачет
3		ОПК-1.3 Владеть навыками применения методов математического анализа и моделирования	Владеть: • Навыками тензорной записи фундаментальных законов механики сплошной среды. • Методами анализа симметрии физических величин и уравнений в тензорной форме.		Вопросы для комбинированного контроля усвоения теоретического материала (устно или письменно), задания к лабораторным работам, тест, реферат, зачет

Фонды оценочных средств по дисциплине «Введение в тензорный анализ»

Вопросы для комбинированного контроля усвоения теоретического материала (устно или письменно)

1. Дайте определение тензора. Чем тензор 2-го ранга принципиально отличается от вектора и скаляра? Приведите примеры физических величин в механике, являющихся скалярами, векторами и тензорами 2-го ранга.

2. Что такое свертка (след) тензора? Продемонстрируйте операцию свертки на примере тензора напряжений. Какой физический смысл имеет след тензора напряжений?

3. Объясните, что такое главные оси и главные значения тензора 2-го ранга. Почему для симметричного тензора (например, тензора напряжений) всегда существует три взаимно перпендикулярные главные оси?

4. Что такое инварианты тензора? Перечислите инварианты тензора напряжений и объясните их физический смысл. Почему они не зависят от выбора системы координат?

5. В чем заключается правило суммирования по повторяющимся индексам (правило Эйнштейна)? Запишите с его помощью закон Гука в компонентной форме для изотропного материала.

6. Дайте определение тензора деформаций Коши (тензора малых деформаций). Как его компоненты связаны с относительным удлинением отрезков и изменением углов между ними?

7. Дайте определение тензора напряжений Коши. Объясните физический смысл его компонент (нормальных и касательных напряжений). Почему этот тензор является симметричным ($\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$)?

8. Запишите обобщенный закон Гука в тензорной форме. Что характеризуют коэффициенты Ламе и как они выражаются через модуль Юнга и коэффициент Пуассона?

9. Что такое девиатор и шаровой тензор напряжений? Какой физический процесс описывает каждый из них в теории пластичности?

10. Сформулируйте критерий пластичности Мизеса. Запишите его через инварианты девиатора напряжений и объясните, почему он удобен для анализа прочности деталей из пластичных материалов, изготовленных путем прототипирования.

11. Объясните, почему знание тензора напряжений необходимо для выбора оптимальной ориентации детали в камере 3D-принтера. Как ориентация влияет на преобразование компонент тензора?

12. Как тензорный анализ применяется для описания анизотропии механических свойств в деталях, полученных методом послойного наплавления (FDM)? Опишите, как может выглядеть тензор упругости для такого материала.

13. Что такое концентрация напряжений? Как тензорный формализм позволяет проанализировать изменение напряженного состояния в зоне концентратора (например, вокруг отверстия в прототипе кронштейна)?

14. Для чего в системах CAE (компьютерного инженерного анализа) результаты расчета представляются в виде полей главных напряжений? Почему эта информация более наглядна и полезна для инженера, чем поля компонент σ_{xx} , σ_{xy} и т.д.?

15. Как используются понятия метрического тензора и тензора кривизны при генерации сетки для конечно-элементного анализа сложной поверхности прототипа?

16. Задача. Задан тензор напряжений в точке в декартовой системе координат $[\sigma]$. Рассчитайте интенсивность напряжений по Мизесу.

17. Задача. Для заданного поля перемещений $u(x,y)$ получите компоненты тензора малых деформаций.

18. Задача. Тензор напряжений задан в одной системе координат. Задайте матрицу преобразования для поворота системы координат на угол θ вокруг оси Z и найдите компоненты тензора в новой системе.

19. Задача. По известным главным напряжениям $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ постройте схему кругов Мора и определите максимальное касательное напряжение.

20. Вопрос-сравнение. Сравните плоское напряженное состояние и плоскую деформацию. В каком случае возникает каждое из них? Как будут выглядеть тензоры напряжений и деформаций для этих случаев?

Критерии и шкала оценивания по оценочному средству –
комбинированный контроль усвоения теоретического материала

Шкала оценивания (интервал баллов)	Критерий оценивания
5	Ответ дан на высоком уровне (студент в полном объеме осветил рассматриваемую проблематику, привел аргументы в пользу своих суждений, владеет профильным понятийным (категориальным) аппаратом и т.п.)
4	Ответ дан на среднем уровне (студент в целом осветил рассматриваемую проблематику, привел аргументы в пользу своих суждений, допустив некоторые неточности и т.п.)
3	Ответ дан на низком уровне (студент допустил существенные неточности, изложил материал с ошибками, не владеет в достаточной степени профильным категориальным аппаратом и т.п.)
2	Ответ дан на неудовлетворительном уровне или не представлен (студент не готов, не выполнил задание и т.п.)

Лабораторные работы. Цели и задачи.

Лабораторная работа №1: Основы тензорной алгебры. Операции в различных системах координат.

Цель: Освоить основные операции тензорной алгебры и научиться выполнять преобразования компонент тензоров при переходе между различными системами координат (декартовой, цилиндрической).

Задачи:

1. Задать тензор 2-го ранга в декартовой системе координат.
2. Выполнить операции сложения, умножения на скаляр, свертки и нахождения инвариантов.
3. Задать новую (например, повернутую на 45°) или цилиндрическую систему координат.
4. Рассчитать матрицу преобразования (матрицу направляющих косинусов).
5. Найти компоненты исходного тензора в новой системе координат.

Связь с профилем: Понимание преобразований критично для анализа напряжений в деталях сложной формы, создаваемых на 3D-принтере, где локальные системы координат не совпадают с глобальной.

Лабораторная работа №2: Тензор деформаций. Анализ деформированного состояния элемента конструкции.

Цель: Исследовать поле малых деформаций в окрестности точки и проанализировать изменение длины и угла произвольного линейного элемента.

Задачи:

1. Задать поле вектора перемещений для простого случая (например, чистый изгиб или растяжение сдвигом).
2. Вычислить компоненты тензора деформаций Коши.
3. Найти главные деформации и главные направления.
4. Для заданного направления (например, под углом 30° к оси) рассчитать относительное удлинение и изменение угла (сдвиг).

Связь с профилем: Анализ деформаций необходим для проверки геометрической точности прототипа под нагрузкой и для прогнозирования его поведения при испытаниях.

Лабораторная работа №3: Тензор напряжений. Определение главных напряжений и опасных точек.

Цель: Научиться анализировать напряженное состояние в точке, определять главные напряжения и максимальные касательные напряжения.

Задачи:

1. Задать тензор напряжений для двумерного (плоское напряженное состояние) или трехмерного случая.
2. Решить характеристическое уравнение для нахождения главных напряжений и их направлений.
3. Определить интенсивность напряжений (напряжение по Мизесу) и максимальное касательное напряжение (напряжение по Треске).
4. Построить круги Мора для визуализации напряженного состояния.

Связь с профилем: Ключевая задача при проектировании любого прототипа — оценка его прочности. Расчет главных напряжений и использование критериев пластичности (Мизес, Треска) — основа для выбора материала и оптимизации геометрии.

Лабораторная работа №4: Закон Гука в тензорной форме. Связь напряжений и деформаций для изотропного материала.

Цель: Освоить запись обобщенного закона Гука через тензоры напряжений и деформаций и научиться определять упругие постоянные материала.

Задачи:

1. Записать закон Гука в тензорной форме через модуль Юнга и коэффициент Пуассона, а также через модуль сдвига и коэффициент Ламе.
2. Для заданного тензора деформаций рассчитать тензор напряжений и наоборот.
3. Экспериментально (на основе данных моделирования МКЭ или виртуального эксперимента) по известным напряжениям и деформациям определить модуль Юнга и коэффициент Пуассона для материала прототипа.

Связь с профилем: Моделирование работы прототипа в программных комплексах (CAE) основано на этих соотношениях. Понимание связи между σ и ϵ необходимо для корректной интерпретации результатов simulation.

Лабораторная работа №5: Тензорный анализ геометрии поверхности. Расчет кривизны.

Цель: Познакомиться с применением тензоров для описания геометрии поверхностей сложной формы, что актуально для прототипов, создаваемых аддитивными методами.

Задачи:

1. Задать параметрическое уравнение поверхности (например, параболоид, геликоид или поверхность, импортированная из CAD-модели в дискретном виде).
2. Рассчитать первую (метрический тензор) и вторую фундаментальные формы поверхности.
3. Вычислить гауссову и среднюю кривизну поверхности в заданной точке.
4. Проанализировать, является ли точка эллиптической, гиперболической или параболической.

Связь с профилем: Анализ кривизны важен для оценки технологичности 3D-печати (избегание "ступенчатости"), проектирования оболочек и анализа устойчивости тонкостенных конструкций.

Лабораторная работа №6: Расчет на прочность простейшего элемента конструкции с использованием тензорного аппарата (комплексная работа).

Цель: Применить полученные знания для комплексного решения инженерной задачи по оценке прочности элемента конструкции прототипа.

Задачи:

1. Для заданной детали (например, кронштейн, вал) определить напряженно-деформированное состояние в наиболее нагруженной точке.
2. Преобразовать тензор напряжений в главные оси.
3. Используя один из критериев прочности (Мизеса или Треска), проверить, выполняется ли условие прочности.
4. Сделать вывод о пригодности геометрии и материала прототипа для данных нагрузок.

Связь с профилем: Итоговая работа, имитирующая реальную задачу инженера-расчетчика: от модели к анализу и выводу о целесообразности изготовления прототипа.

Критерии и шкала оценивания по оценочному средству – *лабораторная работа*

Шкала оценивания (интервал баллов)	Критерий оценивания
5	Задание выполнено на высоком уровне (студент в полном объеме осветил рассматриваемую проблематику, привел аргументы в пользу своих суждений, владеет профильным понятийным (категориальным) аппаратом и т.п.)
4	Задание выполнено на среднем уровне (студент в целом осветил рассматриваемую проблематику, привел аргументы в пользу своих суждений, допустив некоторые неточности и т.п.)
3	Задание выполнено на низком уровне (студент допустил существенные неточности, изложил материал с ошибками, не владеет в достаточной степени профильным категориальным аппаратом и т.п.)
2	Задание выполнено на неудовлетворительном уровне или не представлен (студент не готов, не выполнил задание и т.п.)

Тест

(Выберите один или несколько правильных ответов для каждого вопроса.)

Часть 1: Основные понятия (1-5)

1. Тензор – это математический объект, который:
 - a) Имеет только величину.
 - b) Инвариантен относительно выбора системы координат, но его компоненты преобразуются по определенному закону.
 - c) Всегда можно изобразить в виде стрелки в пространстве.
 - d) Описывается тремя компонентами в трехмерном пространстве.
2. Физическая величина, являющаяся тензором второго ранга в механике сплошной среды:
 - a) Температура
 - b) Скорость точки
 - c) Масса
 - d) Напряжение
3. Главные напряжения – это:
 - a) Максимальные касательные напряжения в точке.
 - b) Нормальные напряжения на площадках, где касательные напряжения равны нулю.
 - c) Сумма нормальных напряжений по трем осям.
 - d) Напряжения, вычисленные в главных осях тензора деформаций.
4. Если к образцу материала приложено всестороннее равномерное сжатие, то тензор напряжений в главных осях будет иметь вид:
 - a) $[\sigma, 0, 0; 0, 0, 0; 0, 0, 0]$
 - b) $[\sigma, 0, 0; 0, \sigma, 0; 0, 0, \sigma]$
 - c) $[0, \tau, 0; \tau, 0, 0; 0, 0, 0]$
 - d) $[\sigma_1, 0, 0; 0, \sigma_2, 0; 0, 0, 0]$, где $\sigma_1 \neq \sigma_2$
5. Инварианты тензора – это величины, которые:
 - a) Зависят от ориентации системы координат.
 - b) Не зависят от выбора системы координат.
 - c) Всегда равны нулю для симметричных тензоров.
 - d) Определяют прочность материала.

Часть 2: Приложения в механике и прототипировании (6-10)

6. Тензор деформаций используется для количественного описания:
 - a) Силового взаимодействия между частицами тела.

- b) Меры изменения формы и размеров тела.
- c) Распределения температуры в детали.
- d) Электрического поля в материале.

7. При анализе результатов конечно-элементного расчета прототипа кронштейна, поле главных напряжений наиболее полезно для инженера, так как оно позволяет:

- a) Определить удельный вес материала.
- b) Наглядно увидеть зоны максимального растяжения и сжатия, критичные для разрушения.
- c) Рассчитать общую массу детали.
- d) Оценить тепловые деформации.

8. Закон Гука в тензорной форме связывает:

- a) Тензор напряжений и тензор скоростей деформаций.
- b) Тензор деформаций и вектор перемещений.
- c) Тензор напряжений и тензор деформаций.
- d) Шаровую часть и девиатор тензора напряжений.

9. Почему при прочностном анализе деталей, изготовленных методом FDM 3D-печати, может потребоваться учет анизотропии свойств?

- a) Потому что пластик имеет очень высокую плотность.
- b) Потому что прочность по оси наплавления (Z) может отличаться от прочности в плоскости слоя (XY).
- c) Потому что температура печати постоянно меняется.
- d) Потому что цвет пластика влияет на его механические свойства.

10. Критерий пластичности Мизеса (энергетический критерий) основан на использовании:

- a) Первого инварианта тензора напряжений.
- b) Шаровой части тензора напряжений.
- c) Второго инварианта девиатора напряжений.
- d) Максимального главного напряжения.

Часть 3: Вопросы на установление соответствия (11-12)

11. Установите соответствие между физической величиной и ее тензорным рангом:

- 1. Масса
- 2. Сила
- 3. Напряжение
- 4. Угловая скорость

- A) Скаляр (ранг 0)
- B) Вектор (ранг 1)
- C) Тензор 2-го ранга

Ваш ответ:*

1 - ..., 2 - ..., 3 - ..., 4 - ...

12. Установите соответствие между понятием и его описанием:

- 1. Главные оси тензора
- 2. Девиатор напряжений
- 3. Свертка тензора
- 4. Концентрация напряжений

- A) Направления, в которых тензор имеет только нормальные компоненты.
- B) Операция, результатом которой является скаляр (например, след).
- C) Часть тензора напряжений, отвечающая за изменение формы.
- D) Локальное увеличение напряжений вблизи вырезов, отверстий и т.д.

Ваш ответ:

1 - ..., 2 - ..., 3 - ..., 4 - ...

Ключ для проверки:

Часть 1: 1-b; 2-d; 3-b; 4-b; 5-b.

Часть 2: 6-b; 7-b; 8-c; 9-b; 10-c.

Часть 3:

11. 1-A; 2-B; 3-C; 4-B.

12. 1-A; 2-C; 3-B; 4-D.

Критерии и шкала оценивания по оценочному средству – *тест*

Шкала оценивания	Критерий оценивания
5	Тесты выполнены на высоком уровне (правильные ответы даны на 90-100% тестов)
4	Тесты выполнены на среднем уровне (правильные ответы даны на 75-89% тестов)
3	Тесты выполнены на низком уровне (правильные ответы даны на 50-74% тестов)
2	Тесты выполнены на неудовлетворительном уровне (правильные ответы даны менее чем на 50% тестов)

Реферат

Раздел 1: Тензорный анализ в механике материалов и прочности

1. Роль тензора напряжений и деформаций в оценке прочности машиностроительных прототипов.

Содержание: Раскрыть понятия тензоров напряжений и деформаций, их физический смысл. Показать на конкретных примерах (кронштейн, вал), как анализ главных напряжений и интенсивности напряжений по Мизесу используется для проверки прочности прототипа при статическом нагружении.

2. Критерии пластичности (Мизеса и Треска) в тензорной формулировке и их применение для прогнозирования разрушения прототипов.

Содержание: Сравнительный анализ критериев, их вывод через инварианты девиатора напряжений. Примеры использования в CAE-программах для определения запаса прочности деталей, изготовленных из пластичных материалов (металлы, пластики).

3. Тензорный анализ остаточных напряжений в деталях, полученных методом селективного лазерного спекания (SLM).

Содержание: Исследование причин возникновения остаточных напряжений при 3D-печати металлом. Методы их математического описания и экспериментального измерения. Влияние остаточных напряжений на усталостную прочность и точность прототипа.

Раздел 2: Тензорные методы в расчетах и моделировании (CAE)

4. Тензорный формализм как основа метода конечных элементов (МКЭ).

Содержание: Показать, как уравнения равновесия в тензорной форме и обобщенный закон Гука являются фундаментом для построения конечно-элементных моделей. Пример реализации для простого элемента (например, плоского квадратного).

5. Анализ анизотропии механических свойств в композитных материалах для прототипирования с использованием тензора упругости 4-го ранга.

Содержание: Описание структуры тензора упругости для анизотропного, ортотропного и изотропного материалов. Пример расчета деформации детали из углепластика, где свойства зависят от направления укладки волокон.

6. Использование тензоров деформаций для анализа больших перемещений и контактных задач в сборках прототипов.

Содержание: Сравнение тензоров деформаций Коши (малые деформации) и Грина-Лагранжа (большие деформации). Анализ задач, где необходим учет больших деформаций: посадка с натягом, работа упругих защелок, симуляция резиновых уплотнителей.

Раздел 3: Тензоры в геометрии и технологии изготовления прототипов

7. Тензоры кривизны и их применение в задачах оптимизации топологии и генерации сеток для 3D-печати.

Содержание: Исследование связи метрического тензора и тензора кривизны поверхности с алгоритмами построения адаптивных сеток в CAE-системах. Как учет кривизны позволяет повысить точность расчета при минимизации вычислительных затрат.

8. Тензорный подход к описанию дефектов поверхности прототипов, возникающих при аддитивном производстве (эффект "ступенчатости").

Содержание: Математическое моделирование геометрии реальной поверхности, полученной послойным синтезом, с использованием тензорных

полей. Влияние ориентации детали в камере построения на шероховатость и точность поверхности.

9. Применение тензора инерции для динамического анализа быстровращающихся компонентов прототипов (роторов, импеллеров).

* *Содержание:* Расчет тензора инерции для тела сложной формы, полученного прототипированием. Анализ дисбаланса и центровки ротора. Связь главных осей инерции с осями вращения для предотвращения вибраций.

Раздел 4: Специальные и перспективные приложения

10. Тензорное описание пьезоэлектрического эффекта и его использование в прототипах датчиков и актюаторов.

Содержание: Исследование пьезоэлектрического тензора, связывающего механические напряжения и электрическое поле. Примеры применения в "умных" прототипах: датчики давления, вибрации, микропозиционеры.

11. Машинное обучение и тензорные разложения для ускорения прочностных расчетов и оптимизации геометрии прототипов.

Содержание: Обзор современных методов, где поля напряжений и деформаций (тензорные поля) аппроксимируются с помощью методов понижения размерности (Tucker, CP разложения) для создания быстрых "суррогатных" моделей.

12. Сравнительный анализ изотропных и анизотропных моделей материала при проектировании высоконагруженных прототипов.

Содержание: Теоретическое и практическое сравнение: когда достаточно изотропной модели (большинство стандартных материалов), а когда необходимо учитывать анизотропию (композиты, 3D-печать). Последствия некорректного выбора модели для прогноза поведения прототипа.

Критерии и шкала оценивания по оценочному средству – *реферат*

Шкала оценивания (интервал баллов)	Критерий оценивания
5	Реферат представлен на высоком уровне (студент в полном объеме осветил рассматриваемую проблематику, привел аргументы в пользу своих суждений, владеет профильным понятийным (категориальным) аппаратом и т.п.). Оформлен в соответствии с требованиями, предъявляемыми к данному виду работ.
4	Реферат представлен на среднем уровне (студент в целом осветил рассматриваемую проблематику, привел аргументы в пользу своих суждений, допустив некоторые неточности и т.п.). В оформлении допущены некоторые неточности в соответствии с требованиями, предъявляемыми к данному виду работ.
3	Реферат представлен на низком уровне (студент допустил существенные неточности, изложил материал с ошибками, не владеет в достаточной степени профильным категориальным аппаратом и т.п.). В оформлении допущены ошибки в соответствии с требованиями, предъявляемыми к данному виду работ.
2	Реферат представлен на неудовлетворительном уровне или не представлен (студент не готов, не выполнил задание и т.п.)

Оценочные средства для промежуточной аттестации (зачет)

1. Дайте определение тензора. Объясните, что такое ранг (валентность) тензора. Приведите примеры скаляров, векторов и тензоров 2-го ранга в механике.
2. Что такое симметричный и антисимметричный тензор? Приведите пример симметричного тензора из курса механики.
3. Объясните операцию свертки (следования) тензора. Чему равен след тензора напряжений и какой физический смысл он имеет?
4. Что такое главные оси и главные значения тензора 2-го ранга? Сформулируйте задачу нахождения главных значений и главных направлений.
5. Дайте определение инвариантов тензора. Почему они называются инвариантами? Перечислите инварианты тензора напряжений.
6. Дайте определение тензора напряжений Коши. Объясните физический смысл его компонент.
7. Дайте определение тензора малых деформаций (тензора Коши). Как его компоненты связаны с изменением длин и углов?
8. Сформулируйте обобщенный закон Гука для изотропного тела в тензорной форме. Что характеризуют постоянные Ламе?
9. Что такое шаровую часть тензора напряжений и девиатор напряжений? Какой физический процесс описывает каждая из этих частей?
10. Сформулируйте критерий пластичности Мизеса. Запишите его через инварианты девиатора напряжений и объясните его физический смысл.
11. Для чего при прочностном анализе прототипа выполняется преобразование тензора напряжений к главным осям? Что показывают главные напряжения?
12. Объясните, почему для деталей, изготовленных методом послойного аддитивного производства (например, FDM), может наблюдаться анизотропия механических свойств. Как это отражается на тензоре упругости?
13. Что такое концентрация напряжений? Как тензорный анализ позволяет описать изменение напряженного состояния в зоне концентратора (например, вокруг отверстия)?
14. Как используются поля главных напряжений, полученные в результате конечно-элементного анализа (CAE), для оптимизации геометрии прототипа (топологическая оптимизация)?
15. Почему при расчете валов и роторов необходимо знать тензор инерции их прототипов? Как связаны главные оси инерции и вибрации конструкции?
16. Как ориентация детали в камере 3D-принтера влияет на преобразование компонент тензора напряжений относительно материала и почему это важно учитывать?
17. Что такое остаточные напряжения и как они возникают в процессе прототипирования (например, при SLS/DMLS печати металлом)? Как их описывают с помощью тензорного формализма?
18. Объясните, как понятия метрического тензора и кривизны поверхности используются при подготовке CAD-модели к конечно-элементному анализу (генерация сетки).

19. В чем заключается различие между тензором деформаций Коши (малые деформации) и тензором деформаций Грина-Лагранжа (большие деформации)? Приведите пример из области прототипирования, где необходимо учитывать большие деформации.

20. Как тензорный анализ способствует созданию цифровых двойников машиностроительных объектов и их прототипов?

Критерии и шкала оценивания по оценочному средству – зачет

Шкала оценивания (интервал баллов)	Критерий оценивания
зачтено	<p>Студент глубоко и в полном объеме владеет программным материалом. Грамотно, исчерпывающе и логично его излагает в устной или письменной форме. При этом знает рекомендованную литературу, проявляет творческий подход в ответах на вопросы и правильно обосновывает принятые решения, хорошо владеет умениями и навыками при выполнении практических задач.</p> <p>Студент знает программный материал, грамотно и по сути излагает его в устной или письменной форме, допуская незначительные неточности в утверждениях, трактовках, определениях и категориях или незначительное количество ошибок. При этом владеет необходимыми умениями и навыками при выполнении практических задач.</p> <p>Студент знает только основной программный материал, допускает неточности, недостаточно четкие формулировки, непоследовательность в ответах, излагаемых в устной или письменной форме. При этом недостаточно владеет умениями и навыками при выполнении практических задач. Допускает до 30% ошибок в излагаемых ответах.</p>
не зачтено	<p>Студент не знает значительной части программного материала. При этом допускает принципиальные ошибки в доказательствах, в трактовке понятий и категорий, проявляет низкую культуру знаний, не владеет основными умениями и навыками при выполнении практических задач. Студент отказывается от ответов на дополнительные вопросы.</p>

Лист изменений и дополнений

№ п/п	Виды дополнений и изменений	Дата и номер протокола заседания кафедры (кафедр), на котором были рассмотрены и одобрены изменения и дополнения	Подпись (с расшифровкой) заведующего кафедрой (заведующих кафедрами)