

**Комплект оценочных материалов по дисциплине
«Современные методы вычислительной математики в решении задач
мехатроники и робототехники»**

Задания закрытого типа

Задания закрытого типа на выбор правильного ответа

Выберите все правильные варианты ответы

1. Какие из следующих методов относятся к прямым методам решения систем линейных уравнений:

- А) Метод Гаусса
- Б) Метод Якоби
- В) Метод Крамера
- Г) Метод Гаусса-Зейделя
- Д) Конгруэнтный градиентный метод

Правильные ответы: А, В

Компетенции (индикаторы): ОПК-13

2. Какие утверждения справедливы для прямых методов решения систем линейных уравнений:

- А) Хорошо подходят для небольших систем, когда важна точность решения
- Б) Решение находится за предсказуемое время
- В) Подходят для больших и сильно разреженных систем
- Г) Требуют меньше памяти
- Д) Вычислительно неустойчивы на плохо обусловленных системах

Правильные ответы: А, Б, Д

Компетенции (индикаторы): ОПК-13

3. Численные методы интегрирования применяются в следующих случаях:

- А) подынтегральная функция задана таблично
- Б) первообразная подынтегральной функции не выражается через элементарные функции.
- В) известно выражение первообразной подынтегральной функции как комбинация элементарных функций.
- Г) определение первообразной подынтегральной функции слишком сложно

Правильные ответы: А, Б, Г

Компетенции (индикаторы): ОПК-13

4. Какие из приведенных методов решения нелинейных уравнений можно отнести к градиентным методам:

- А) Дихотомии
- Б) Простых итераций
- В) Ньютона
- Г) Секущих
- Д) Хорд

Правильные ответы: В, Г, Д

Компетенции (индикаторы): ОПК-13

Задания закрытого типа на установление соответствия

Установите правильное соответствие.

Каждому элементу левого столбца соответствует только один элемент правого столбца.

1. Сопоставьте методы численного решения нелинейных уравнений с их основной идеей:

- | | |
|---------------------------|--|
| 1) Метод дихотомии | А) На каждом шаге поиска сложную функцию можно аппроксимировать касательной, аналитически определяемой через производную, для которой легко найти точку пересечения с осью абсцисс. |
| 2) Метод простых итераций | Б) В каждой точке решения функция заменяется касательной, при этом угол наклона вычисляется численно, а в качестве приращения берется величина, близкая к требуемой точности результата. |
| 3) Метод Ньютона | В) Если функция непрерывна на интервале и имеет различные знаки на его концах, то внутри интервала должен быть минимум один корень. |
| 4) Метод секущих | Г) Один из концов диапазона уточнения корня фиксируется, а второй на каждом шаге используется для аппроксимации исходной функции хордой, соединяющей концы отрезка. |
| 5) Метод хорд | Д) Если функцию вида $f(x) = 0$ переписать в виде $x = g(x)$, то поиск корня можно свести к вычислению рекуррентной последовательности, при условии, что она сходится в окрестности поиска. |

Правильный ответы: 1-В, 2-Д, 3-А, 4-Б, 5-Г

Компетенции (индикаторы): ОПК-13

2. Сопоставьте виды математических моделей (подходов к моделированию) процессов и систем и их существенные свойства и характеристики:

- | | |
|-----------------------------|---|
| 1) Аналитическая модель | А) Предполагается отсутствие случайных воздействий, используются алгебраические, дифференциальные, интегральные уравнения, матричная алгебра. |
| 2) Имитационная модель | Б) Процессы функционирования реальных объектов, процессов или систем записываются в виде явных функциональных зависимостей. |
| 3) Детерминированная модель | В) Учитывает случайный характер процессов в исследуемых объектах и системах, который описывается методами теории вероятности и математической статистики. |
| 4) Стохастическая модель | Г) Функционирование объектов, процессов или систем описывается набором алгоритмов. |

Правильные ответы: 1-Б, 2-Г, 3-А, 4-В

Компетенции (индикаторы): ОПК-13

3. Сопоставьте подходы к решению задачи интерполяции и их основную идею:

- | | |
|---|---|
| 1) Прямое построение интерполяционного многочлена | А) Приближение ищется в виде $L_n(x) = f(x_0) + \sum_{i=1}^n f(x_0; x_1; \dots; x_i) \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j)$, где $f(x_0; x_1; \dots; x_i)$ - рекуррентно определенные разделенные разности. |
| 2) Интерполяция по Лагранжу | Б) В качестве приближающей функции берется алгебраический полином степени на единицу меньше количества узловых точек. Подставляя в него отдельные узловые точки, получаем систему линейных уравнений, которую можно решить методом Гаусса, найдя коэффициенты полинома. |
| 3) Интерполяция по Ньютону | В) Приближение ищется в виде $L_n(x) = \sum_{j=0}^n B_j \cdot y_j$, где $B_j = \prod_{i=0}^n \frac{x - x_i}{x_j - x_i}$, при условии $i \neq j$, за счет чего в узловых точках достигается $L_n(x_i) = y_i$. |

Правильные ответы: 1-Б, 2-В, 3-А

Компетенции (индикаторы): ОПК-13

4. Установите соотношения между методами обработки опытных данных и их характеристиками:

- | | |
|-----------------|--|
| 1) Интерполяция | А) Сглаживание опытных данных, при этом вспомогательная функция не обязательно проходит через все узловые точки. |
|-----------------|--|

- | | |
|------------------|---|
| 2) Экстраполяция | Б) Нахождение значения табличной функции в промежуточной точке, принадлежащей интервалу, на котором заданы узловые точки, по вспомогательной функции, проходящей через все узловые точки. |
| 3) Аппроксимация | В) Нахождение значения таблично заданной функции за пределами интервала, в котором заданы узловые точки – задача прогноза. |

Правильные ответы: 1-Б, 2-В, 3-А

Компетенции (индикаторы): ОПК-13

Задания закрытого типа на установление правильной последовательности

Установите правильную последовательность. Запишите правильную последовательность букв слева направо.

1. Расположите указанные действия в правильном порядке для получения алгоритма решения системы линейных уравнений методом Гаусса:

- А) Если $a[k][k] = 0$, среди строк $i=k+1..N$ найти строку с $a[i][k] \neq 0$ и поменять ее и свободный член с k -й строкой.
- Б) Все строки $k = 1..N$ и свободные члены разделить на $a[k][k]$.
- В) Из всех строк $i=k+1..N$ и свободного члена вычесть строку k , умноженную на коэффициент $a[i][k]/a[k][k]$.
- Г) Матрица станет единичной, столбец свободных членов будет решением.
- Д) Для всех строк кроме первой $k = N..2$ выполнить обратный ход.
- Е) Для всех строк кроме последней $k=1..N-1$ выполнить прямой ход.
- Ж) В результате матрица примет треугольный вид.
- З) Матрица примет диагональный вид.
- И) Из всех строк $i = 1..k$ и свободного члена вычесть строку k , умноженную на коэффициент $a[i][k]/a[k][k]$.

Правильный ответ: Е, А, В, Ж, Д, И, З, Б, Г

Компетенции (индикаторы): ОПК-11

2. Расположите указанные действия в правильном порядке для получения алгоритма решения системы нелинейных уравнений методом Ньютона:

- А) Вычислить якобиан системы, используя аналитическое вычисление частных производных или с помощью численного дифференцирования и столбец свободных членов.

- Б) Задаться вектором начального приближения.
- В) Если для всех приращений выполняется условие $|h_j| \leq \varepsilon$, то вычисления окончены.
- Г) К построенной системе линейных уравнений применить метод Гаусса, в результате решения получится вектор приращений.
- Д) Иначе повторить шаги, начиная с вычисления якобиана.
- Е) С помощью вектора приращений уточнить текущее приближение решения.

Правильный ответ: Б, А, Г, Е, В, Д

Компетенции (индикаторы): ОПК-11

3. Расположите указанные действия в правильном порядке для получения алгоритма аппроксимации опытных данных методом наименьших квадратов:

- А) Решить систему линейных уравнений методом Гаусса, получив коэффициенты аппроксимирующего полинома a_m .
- Б) Выбрать степень аппроксимирующего полинома m .
- В) Составить систему линейных уравнений с учетом того, что в первом уравнении используются коэффициенты $c_0..c_m$, а в каждом следующем все индексы увеличиваются на единицу.
- Г) Найти сумму квадратов отклонений по всем узловым точкам $S = \sum_{i=1}^N \varepsilon_i^2$ и остаточную дисперсию $D = \frac{S}{N-(m+1)}$.
- Д) Рассчитать $2*m$ коэффициентов системы уравнений и m свободных членов по формулам $c_k = \sum_{i=0}^n x_i^k$ и $d_j = \sum_{i=0}^n y_i x_i^j$.

Правильный ответ: Б, Д, В, А, Г

Компетенции (индикаторы): ОПК-11

4. Расположите указанные действия в правильном порядке для получения алгоритма решения системы нелинейных уравнений методом простых итераций:

- А) Выбрать вектор начального приближения.
- Б) Аналитически вычислить частные производные и определить область сходимости решения $\sum_{i=1}^n |\partial \phi_i / \partial x_j| < 1$.
- В) Иначе повторить с шага подстановки приближения в систему.
- Г) Поставить текущее приближение в преобразованную систему получить следующее приближение.
- Д) Привести систему к виду $x_i = \phi_i(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$.
- Е) Если разница между приближениями $|x_j^k - x_j^{k-1}| \leq \varepsilon$ по всем переменным вычисления закончены.

Правильный ответ: Д, Б, А, Г, Е, В
Компетенции (индикаторы): ОПК-11

Задания открытого типа

Задания открытого типа на дополнение

Напишите пропущенное слово (словосочетание).

1. Возникающая в задаче решения системы нелинейных уравнений $f_i(x_1, \dots, x_n) = 0$ матрица A , составленная из частных производных $a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$; $i = \overline{1, n}$; $j = \overline{1, n}$, называется матрицей _____.

Правильный ответ: Якоби

Компетенции (индикаторы): ОПК-13

2. Нахождение приближённого значения интеграла в форме $I = \sum_{i=0}^{n-1} S_i$ называется _____.

Правильный ответ: квадратурой

Компетенции (индикаторы): ОПК-13

3. Метод вычисления квадратур, при котором подынтегральная функция на каждом отрезке аппроксимируется квадратичной параболой $a_0x^2 + a_1x + a_2$, называется _____.

Правильный ответ: метод Симпсона

Компетенции (индикаторы): ОПК-13

4. Нахождение частного решения дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$, удовлетворяющего начальному условию $y|_{x=x_0} = y_0$, называется _____.

Правильный ответ: задачей Коши

Компетенции (индикаторы): ОПК-13

Задания открытого типа с кратким свободным ответом

Напишите результат вычислений.

1. Дано нелинейное дифференциальное уравнение 2-го порядка в общем виде:
$$x^2 y'' - x y' + (x^2 - 1) y = 0,$$

перепишите его в нормальной форме.

Правильный ответ:

$$y'' = (xy' - (x^2 - 1)y)/x^2 = y'/x - y(x^2 - 1)/x^2$$

Компетенции (индикаторы): ОПК-13

2. Дано нелинейное дифференциальное уравнение 2-го порядка в нормальной форме:

$$y'' = \frac{1}{x}y' - \frac{x^2 - 1}{x^2}y$$

с помощью замен $y_1 = y', y'' = y_1'$ сведите к системе нелинейных дифференциальных уравнения первого порядка.

Правильный ответ:

$$y_1 = y',$$

$$y_1' = y_1/x - y(x^2 - 1)/x^2$$

Компетенции (индикаторы): ОПК-13

3. Преобразуйте систему нелинейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = 1 \\ \ln x_1 + 2x_2 = -1 \end{cases}$$

к виду, пригодному для поиска решения методом простых итераций.

Правильный ответ:

$$x_1 = \sqrt{1 - x_2^2} = f_1(x_1, x_2)$$

$$x_2 = -0.5 - 0.5 \ln(x_1) = f_2(x_1, x_2)$$

Компетенции (индикаторы): ОПК-13

Дайте ответ на вопрос.

4. Пусть $f(t) = y'(t)$, где $y(t)$ правая часть рекуррентного уравнения $t = y(t)$, полученная в результате преобразования некоторого нелинейного уравнения. Как должна вести себя $f(t)$ на интервале уточнения корня для того, чтобы метод простых итераций сходиллся. Запишите неравенство.

Правильный ответ: $|f(t)| < 1$ / быть по модулю меньше единицы

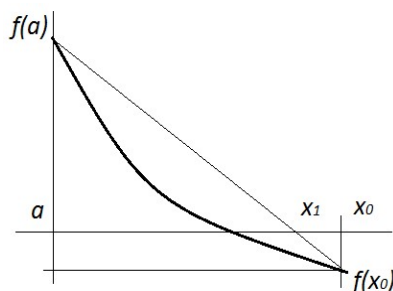
Компетенции (индикаторы): ОПК-13

5. Пусть необходимо вычислить приближенное значение интеграла от функции $f(x)$ на интервале $[a..b]$, разбитом на n отрезков шириной $h=(b-a)/n$. Пусть отрезки пронумерованы $i=1..n$. Запишите выражение для приближенного вычисления части интеграла на i -м отрезке, если функция $f(x)$ аппроксимируется трапецией.

Правильный ответ: $h*(f(a+(i-1)*h) + f(a+i*h)) / 2$

Компетенции (индикаторы): ОПК-11, ПК-2

6. Имеется следующая иллюстрация к решению нелинейного уравнения методом хорд.



Где a – зафиксированный конец интервала уточнения корня, x_0 – текущее уточнение корня, x_1 – следующее уточнение корня. Пользуясь методом подобия треугольников, запишите, чему равен шаг уточнения корня ($x_0 - x_1$) как выражение от других присутствующих на иллюстрации значений.

Правильный ответ: $(x_0 - a) * (-f(x_0)) / (f(a) - f(x_0))$

или $(x_0 - a) * f(x_0) / (f(x_0) - f(a))$

Компетенции (индикаторы): ОПК-11, ПК-2

Задания открытого типа с развернутым ответом

1. Дайте словесное определение алгоритма уточнения корня нелинейного уравнения методом дихотомии для достижения заданной точности решения.

Время выполнения – 50 мин.

Ожидаемый результат:

- Для решения необходимо привести уравнение к виду $f(x) = 0$.
- Метод основан на идее, что если функция непрерывна и на концах интервала меняет знак, то внутри интервала должен быть минимум один корень.
- Находим середину интервала, вычисляем значение функции в этой точке, а второе значение, например, на правом конце интервала уточнения корня.
- Если функция имеет разные знаки (произведение результатов отрицательно), принимаем за новую левую границу интервала его центр.
- Иначе, если знак не меняется, принимаем центр интервала в качестве его новой правой границы.
- Повторяем указанные шаги до тех пор, пока ширина интервала уточнения корня не окажется меньше желаемой точности.
- В качестве ответа берем середину интервала.
- Подставляя ответ в уравнение, выполняем проверку.

Критерии оценивания: ответ должен содержать не менее пяти смысловых элементов, указанных в разделе ожидаемый результат.

Компетенции (индикаторы): ОПК-11, ПК-2

2. Дайте словесное определение алгоритма уточнения корня нелинейного уравнения методом хорд для достижения заданной точности решения.

Время выполнения – 50 мин.

Ожидаемый результат:

- а) Для решения необходимо привести уравнение к виду $f(x) = 0$.
- б) Метод основан на аппроксимации функции на интервале хордой, соединяющей точки образованные значениями функции на концах интервала, пересечение которой с осью абсцисс дает следующее приближение корня.
- в) Фиксируем один из концов интервала, второй конец будет уточняться.
- г) Для вывода формулы уточнения корня рисуем отрезок уточнения, хорду, обнаруживаем прямоугольные треугольники, катеты которых зависят от ширины интервала и значений функции на его краях.
- д) Записываем формулу уточнения, используя теорему подобия треугольников, находим шаг, и сдвигаем незафиксированную границу интервала.
- е) Повторяем то же пор, пока шаг уточнения по модулю больше требуемой точности.
- ж) В качестве ответа берем незафиксированную границу интервала.
- з) Подставляя ответ в уравнение, выполняем проверку.

Критерии оценивания: ответ должен содержать не менее пяти смысловых элементов, указанных в разделе ожидаемый результат.

Компетенции (индикаторы): ОПК-11, ПК-2

3. Дайте словесное определение алгоритма уточнения корня нелинейного уравнения методом секущих для достижения заданной точности решения.

Время выполнения – 50 мин.

Ожидаемый результат:

- а) Метод секущих является модификацией метода Ньютона, в котором аналитическое вычисление производной заменено ее приближением (численное дифференцирование).
- б) Суть метода Ньютона заключается в аппроксимации функции касательной в точке, соответствующей текущему приближению корня, а в качестве следующего приближения берется пересечение касательной оси абсцисс.
- в) Имеем прямоугольный треугольник, в котором касательная является гипотенузой, один из катетов есть значение функции в текущей точке приближения, а второй – смещение до следующей точки, при этом тангенс угла наклона связан как с катетами, так и определяется значением производной.
- г) Исходя из этих соображений, выводим формулу шага.
- д) Задаемся начальным приближением
- е) Рассчитываем величину шага, при этом dx в численном дифференцировании берем того же порядка, что и требуемая точность решения.
- ж) Смешаемся на шаг, если шаг по модулю больше требуемой точности, повторяем расчет шага и смещение точки приближения.

з) Иначе вычисления завершаются, а последняя точка приближения берется в качестве ответа.

и) Подставляя результат в исходное уравнение, выполняем проверку.

Критерии оценивания: ответ должен содержать не менее пяти смысловых элементов, указанных в разделе ожидаемый результат.

Компетенции (индикаторы): ОПК-11, ПК-2

4. Дайте словесное описание алгоритма нахождения приближенного значения определенного интеграла (квадратуры) методом трапеций при необходимости обеспечить заданную точность решения.

Время выполнения – 50 мин.

Ожидаемый результат:

а) Задаем некоторым начальным количеством интервалов разбиения исходного интервала интегрирования, рассчитываем ширину интервала.

б) Заменяем на каждом интервале подынтегральную функцию трапецией, основаниями которой являются значения функции в начале и в конце интервала, а высотой ширина интервала.

в) Площадь трапеции находится как полусумма оснований умноженная на высоту.

г) Вычисляем интеграл на интервале как сумму площадей полученных отрезков.

д) Увеличиваем количество разбиений интервала, по некоторому закону, например $n=2n$ или $n=3n+1$.

е) Заново рассчитываем ширину интервала, аппроксимирующие трапеции и находим их сумму.

ж) Сравниваем два найденных решения, и если разница между ними не превышает заданную точность, выбираем последнее в качестве решения

з) В противном случае снова увеличиваем количество шагов, пересчитываем приближение и сравниваем два последних полученных решения

и) Повторяем до достижения заданной точности.

Критерии оценивания: ответ должен содержать не менее пяти смысловых элементов, указанных в разделе ожидаемый результат.

Компетенции (индикаторы): ОПК-11, ОПК-13

Экспертное заключение

Представленный комплект оценочных материалов по дисциплине «Современные методы вычислительной математики в решении задач мехатроники и робототехники» соответствует требованиям ФГОС ВО.

Предлагаемые оценочные материалы адекватны целям и задачам реализации основной профессиональной образовательной программы по направлению подготовки 15.04.06 Мехатроника и робототехника.

Виды оценочных средств, включенные в представленный фонд, отвечают основным принципам формирования ФОС.

Разработанные и представленные для экспертизы оценочные материалы рекомендуются к использованию в процессе подготовки обучающихся по указанному направлению.

Председатель учебно-методической
комиссии института компьютерных
систем и информационных
технологий



Н.Н. Ветрова

Лист изменений и дополнений

№ п/п	Виды дополнений и изменений	Дата и номер протокола заседания кафедры (кафедр), на котором были рассмотрены и одобрены изменения и дополнения	Подпись (с расшифровкой) заведующего кафедрой (заведующих кафедрами)
1	В фонд оценочных средств добавлен комплект оценочных материалов	26.02.2025 г., №14	 А.И. Горбунов