

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Луганский государственный университет имени Владимира Даля»**

Колледж

**КОМПЛЕКТ КОНТРОЛЬНО-ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ
для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации
в форме дифференцированного зачета**

по учебной дисциплине **ЕН.01 Математика**
по специальности **38.02.06 Финансы**

РАССМОТРЕН И СОГЛАСОВАН

методической комиссией естественно - математических дисциплин

Протокол № 1 от «29» августа 2024г.

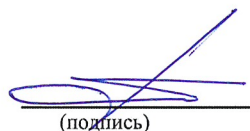
Председатель методической комиссии

 / С. В. Поперчук
(подпись)

Разработан на основе федерального государственного образовательного стандарта среднего профессионального образования по специальности 38.02.06 Финансы

УТВЕРЖДЕН

заместителем директора

 / Захаров В. В.
(подпись)

Составители:

Ферапонтова Елена Евгеньевна, преподаватель Колледжа ФГБОУ ВО «ЛГУ им. В. Даля»,

Захаров Владимир Викторович, преподаватель Колледжа ФГБОУ ВО «ЛГУ им. В. Даля»,

1. Паспорт комплекта контрольно-оценочных средств

В результате освоения учебной дисциплины **ЕН.01 Математика** обучающийся должен обладать предусмотренными ФГОС СПО по специальности **38.02.06 Финансы** следующими умениями (У):

У1 - применять основные понятия и свойства функции одной переменной при решении задач

У2 - раскрывать неопределённости при вычислении пределов

У3 - вычислять производную функции одной переменной, производную сложной функции

У4 - исследовать функцию при помощи производной и строить график функции

У5 - вычислять неопределённый интеграл методом замены переменной и методом интегрирования по частям

У6 - применять формулу Ньютона-Лейбница при вычислении определённого интеграла

У7 - вычислять площадь плоских фигур

У8 - выполнять линейные операции над матрицами, умножение матриц, находить обратные матрицы

У9 - вычислять значение определителей

У10 - решать СЛУ методом Крамера, методом обратной матрицы

У11 - вычислять количества размещений, перестановок, сочетаний

У12 - применять формулы вычисления простого и сложного процентов для решения финансово-экономических задач

У13 - применять формулы теории вероятности и математической статистики для решения финансово-экономических задач

У14 - рассчитывать экономические показатели, применяемые в финансово-экономических расчётах знаниями (З):

З1 - основные понятия и свойства функции одной переменной

З2 - основные понятия теории пределов

З3 - основные понятия теории производной и её приложение

З4 - основные понятия теории неопределённого и определённого интегралов

З5 - определение и свойства матриц, определителей.

З6 - определения и понятия, относящиеся к СЛУ, необходимые для решения СЛУ

З7 - формулы простого и сложного процентов,

З8 - основные понятия теории вероятности и математической статистики, необходимые для решения финансово-экономических задач которые формируют профессиональную компетенцию,

и общими компетенциями:

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам;

ОК 02. Осуществлять поиск, анализ и интерпретацию информации, необходимой для выполнения задач профессиональной деятельности;

ОК 09. Использовать информационные технологии в профессиональной деятельности;

ОК 11. Использовать знания по финансовой грамотности, планировать предпринимательскую деятельность в профессиональной среде.

2. Оценивание уровня освоения учебной дисциплины

Предметом оценивания служат умения и знания, предусмотренные ФГОС СПО по дисциплине **ЕН.01 Математика**, направленные на формирование общих и профессиональных компетенций. Промежуточная аттестация по учебной дисциплине проводится в форме дифференцированного зачета.

Контроль и оценивание уровня освоения учебной дисциплины по темам (разделам)

Таблица 1

Элемент учебной дисциплины	Формы и методы контроля			
	Текущий контроль		Промежуточная аттестация	
	Форма контроля	Проверяемые ОК, У, З	Форма контроля	Проверяемые ОК, У, З
Раздел 1. Математический анализ				
Тема 1.1. Функции одной переменной	Домашняя контрольная работа	У1; З1, ОК 01, ОК 02, ОК 09, ОК 11		
Тема 1.2. Пределы и непрерывность функции.	Домашняя контрольная работа	У1; У2; З1, З2, ОК 01, ОК 02, ОК 09, ОК 11		
Тема 1.3. Производная и ее приложения.	Домашняя контрольная работа	У1; У2; У3; У4; З1, З2, З3; ОК 01, ОК 02, ОК 09, ОК 11		
Тема 1.4. Неопределенный интеграл.	Домашняя контрольная работа	У3; У4; У5; З1, З2, З3, З4; ОК 01, ОК 02, ОК 09, ОК 11		
Тема 1.5. Определенный интеграл	Домашняя контрольная работа	У1; У5; У6; У7; З1; З4; З5; ОК 01, ОК 02, ОК 09, ОК 11		
Раздел 2. Линейная алгебра	Домашняя контрольная работа			
Тема 2.1. Матрицы и определители	Домашняя контрольная работа	У8; У9; З5; ОК 01, ОК 02, ОК 09, ОК 11		
Тема 2.2.	Домашняя контрольная	У8; У9; У10;		

Элемент учебной дисциплины	Формы и методы контроля			
	Текущий контроль		Промежуточная аттестация	
	Форма контроля	Проверяемые ОК, У, З	Форма контроля	Проверяемые ОК, У, З
Системы линейных уравнений	работа	35; 36; ОК 01, ОК 02, ОК 09, ОК 11		
Раздел 3. Основы теории вероятности, комбинаторики и математической статистики.	Домашняя контрольная работа			
Тема 3.1. Основные понятия теории вероятности, комбинаторики и математической статистики.	Домашняя контрольная работа	У11; У13; 38; ОК 01, ОК 02, ОК 09, ОК 11		
Тема 3.2. Элементы математической статистики.	Домашняя контрольная работа	У11; У13; У14; 38; ОК 01, ОК 02, ОК 09, ОК 11		
Раздел 4. Основные математические методы в профессиональной деятельности	Домашняя контрольная работа			
Тема 4.1. Применение методов математического анализа при решении экономических задач	Домашняя контрольная работа	У12; У3; У4; У11; У14; У13; 33; 37; 38; ОК 01, ОК 02, ОК 09, ОК 11		
Тема 4.2. Простейшее приложение линейной алгебры в экономике.	Домашняя контрольная работа	У13; У8; У9; У10; У14 35; 36; 38; ОК 01, ОК 02, ОК 09, ОК 11		
Промежуточная аттестация			Дифференцированный зачет (классная контрольная работа)	У1; У2; У3; У4; У5; У6; У7; У8; У9; У10; У11; У12; У13; У14 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38

Элемент учебной дисциплины	Формы и методы контроля			
	Текущий контроль		Промежуточная аттестация	
	Форма контроля	Проверяемые ОК, У, З	Форма контроля	Проверяемые ОК, У, З
				ОК 01, ОК 02, ОК 09, ОК 11

3. Задания для оценки освоения учебной дисциплины

3.1. Задания для текущего контроля

Текущий контроль знаний и умений обучающихся осуществляется с использованием следующих форм и методов: внеаудиторная самостоятельная работа, домашняя контрольная работа.

Текущий контроль проводится по темам в соответствии с рабочей программой учебной дисциплины.

Задания для проведения текущего контроля прилагаются в соответствии с таблицей 1 данного документа и представлены в Приложении №1.

3.2. Задания для промежуточной аттестации

В соответствии с учебным планом специальности **38.02.06 Финансы** по учебной дисциплине ЕН.01 Математика предусмотрено проведение дифференцированного зачёта. Дифференцированный зачёт в соответствии с настоящим КОС проводится в форме классной контрольной работы.

Задания для проведения промежуточной аттестации приведены в Приложении №2.

4. Условия проведения промежуточной аттестации

Количество вариантов заданий для аттестующихся – 4 варианта.

Время выполнения задания – 80 мин.

Оборудование: бланки документов.

5. Критерии оценивания для промежуточной аттестации

Уровень учебных достижений	Показатели оценки результатов
«5»	Работа выполнена верно и полностью; в логических рассуждениях и обосновании решения нет пробелов и ошибок; в решении нет математических ошибок (возможна одна неточность, описка, не являющаяся следствием незнания или непонимания учебного материала).
«4»	Работа выполнена полностью, но обоснования шагов решения недостаточны (если умение обосновывать рассуждения не являлось специальным объектом проверки); допущена одна ошибка или два-три недочета в выкладках, рисунках, чертежах или графиках (если эти виды работы не являлись специальным объектом проверки); выполнено без недочетов не менее 3/4 заданий.
«3»	допущены более одной ошибки или более трех недочетов в выкладках, чертежах или графиках, но учащийся владеет обязательными умениями по проверяемой теме; без недочетов выполнено не менее половины работы.
«2»	допущены существенные ошибки, показавшие, что обучающийся не владеет обязательными умениями по данной теме в полной мере; правильно выполнено менее половины работы.

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Луганский государственный университет имени Владимира Даля»**

Колледж

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
к выполнению контрольной работы**

по учебной дисциплине **ЕН.01 Математика**
по специальности **38.02.06 Финансы**

для студентов заочной формы обучения

Луганск, 2024

РАССМОТРЕНЫ И СОГЛАСОВАНЫ

методической комиссией естественно - математических дисциплин

Протокол № 1 от «29» августа 20 24 г.

Председатель методической комиссии

_____/ С.В. Поперчук
(подпись)

УТВЕРЖДЕНЫ

заместителем директора

_____/ В.В. Захаров
(подпись)

Составитель:

Захаров Владимир Викторович, преподаватель Колледжа ФГБОУ ВО
«ЛГУ им. В. Даля».

Методические указания предназначены для выполнения домашней контрольной работы по дисциплине ЕН.01 Математика обучающимися заочной формы по специальности 38.02.06 Финансы.

Пособие содержит тексты заданий по основным разделам дисциплины (20 вариантов); примеры выполнения заданий, приложения со справочным материалом по отдельным темам; перечень ссылок на использованную и рекомендованную литературу.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Содержание дисциплины

Порядок выполнения и защиты работы

Задания контрольной работы

Задание №1. Предел функции.

Задание №2. Дифференцирование функций одной переменной

Задание №3. Исследование функций и построение графиков

Задание №4. Неопределенный интеграл.

Задание №5. Определенный интеграл.

Задание №6. Приложения определенного интеграла.

Задание №7. Основные понятия и методы линейной алгебры

Задание №8. Элементы теории вероятностей.

Задание №9. Элементы математической статистики

Задание №10. Процентные вычисления

Примеры выполнения заданий контрольной работы

Задание №1. Предел функции.

Задание №2. Дифференцирование функций одной переменной

Задание №3. Исследование функций и построение графиков

Задание №4. Неопределенный интеграл.

Задание №5. Определенный интеграл.

Задание №6. Приложения определенного интеграла.

Задание №7. Основные понятия и методы линейной алгебры

Задание №8. Элементы теории вероятностей.

Задание №9. Элементы математической статистики

Задание №10. Процентные вычисления

Литература

Введение

Дисциплина ЕН.01 Математика математического и общего естественнонаучного цикла ППСЗ по специальности среднего профессионального образования является связующим звеном между основным (общеобразовательным) курсом математики и специальными дисциплинами, составной частью профессиональной подготовки студентов. Содержание дисциплины, перечень формируемых компетенций, объем часов, отводимых на изучение дисциплины, определяются учебным планом специальности и рабочей программой учебной дисциплины.

Математические модели широко применяются в процессе профессиональной подготовки специалистов среднего звена. Дисциплина ЕН.01 Математика предусматривает развитие и углубление отдельных тем и разделов, которые изучаются в базовом курсе и используются в дальнейшем обучении и профессиональной деятельности.

При выполнении контрольной работы по дисциплине ЕН.01 Математика студенты должны закрепить полученные знания при изучении теоретического курса, а также уделить особое внимание изучению тех разделов математики, которые непосредственно связаны со специальностью.

В результате изучения дисциплины студенты должны:

уметь:

- применять основные понятия и свойства функции одной переменной при решении задач;
- раскрывать неопределённости при вычислении пределов;
- вычислять производную функции одной переменной, производную сложной функции;
- исследовать функцию при помощи производной и строить график функции;
- вычислять неопределённый интеграл методом замены переменной и методом интегрирования по частям;
- применять формулу Ньютона-Лейбница при вычислении определённого интеграла;
- вычислять площадь плоских фигур;
- выполнять линейные операции над матрицами, умножение матриц, находить обратные матрицы;
- вычислять значение определителей;
- решать СЛУ методом Крамера, методом обратной матрицы;
- вычислять количества размещений, перестановок, сочетаний
- применять формулы вычисления простого и сложного процентов для решения финансово-экономических задач;
- применять формулы теории вероятности и математической статистики для решения финансово-экономических задач;
- рассчитывать экономические показатели, применяемые в финансово-экономических расчётах.

знать:

- основные понятия и свойства функции одной переменной;
- основные понятия теории пределов;
- основные понятия теории производной и её приложение;
- основные понятия теории неопределённого и определённого интегралов;
- определение и свойства матриц, определителей;
- определения и понятия, относящиеся к СЛУ, необходимые для решения СЛУ;
- формулы простого и сложного процентов;
- основные понятия теории вероятности и математической статистики необходимые для решения финансово-экономических задач.

Предлагаемые задания и рассмотренные примеры их решения дают возможность закрепить изученный материал.

Содержание дисциплины

1. Математический анализ.

Функция, область определения и множество значений. Способы задания функции. Свойства функции: чётность и нечётность, монотонность, периодичность. Основные элементарные функции, их свойства и графики.

Определение предела функции в точке и на бесконечности. Основные теоремы о пределах. Замечательные пределы. Односторонние пределы функции. Непрерывность элементарных функций. Точки разрыва и их типы.

Производная функции. Геометрический и физический смысл производной. Производная сложной функции. Производная высшего порядка. Исследование функции при помощи производной (монотонность, экстремумы функции, выпуклость и точки перегиба графика) и построение графика функции. Нахождение наименьшего и наибольшего значения функции.

Первообразная и неопределённый интеграл, его свойства.

Методы интегрирования: метод замены переменной и интегрирование по частям.

Задача о криволинейной трапеции. Определённый интеграл и его свойства. Формула Ньютона-Лейбница. Вычисление площади плоских фигур.

2. Линейная алгебра.

Понятие матрицы и виды матриц. Действия над матрицами. Обратная матрица. Определители матриц и их свойства. Ранг матрицы.

Понятие системы линейных уравнений. Решение систем линейных уравнений методом Крамера, методом обратной матрицы.

3. Основы теории вероятности, комбинаторики и математической статистики.

Понятие события и его виды. Операции над событиями.

Понятие вероятности. Теоремы сложения и вычитания вероятностей. Формула полной вероятности. Схема независимых событий. Формула Бернулли.

Основные задачи и понятия математической статистики. Определение выборки и выборочного распределения. Графическое изображение выборки. Определение понятия полигона и гистограммы. Статистическое распределение.

Оценка параметров генеральной совокупности по её выборке. Интервальная оценка. Доверительный интервал и доверительная вероятность.

4. Основные математические методы в профессиональной деятельности.

Процент. Нахождение процента от числа; числа по его процентам; процентное отношение двух чисел. Формулы простого и сложного процентов.

Производная функции; производная сложной функции. Экономический смысл производной.

Решение экономических задач с применением матриц и систем линейных уравнений.

Порядок выполнения и защиты работы

1. Номер варианта определяется в соответствии с номером по списку обучающихся группы.
2. Перед выполнением работы студент обязан проработать теоретический материал, конспект лекций и соответствующие разделы дополнительной литературы.
3. Контрольная работа выполняется в тетради (в клетку), титульный лист установленного образца наклеивается на обложку тетради. В работе обязательно нужно указать номер варианта, записать условия заданий и полное решение. Выполненная контрольная работа сдается секретарю.
4. Если в результате проверки работы преподавателем обнаружены существенные недостатки, то она возвращается студенту на доработку. Также студенту может быть предложено выполнить заново другой вариант работы.
5. Защита работы проходит во время лабораторно-экзаменационной сессии. Положительная оценка (зачтено) является необходимым условием для допуска студента к промежуточной аттестации.

Задания контрольной работы

Задание № 1. Предел функции.

Найдите пределы функций (не пользуясь правилом Лопиталя).

№	а)	б)	в)	г)
1.1	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3+x+5x^4}{x^4-12x+1}$	$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2+4x+3}{2x^2+9x+9}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{2x-3x^2}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$
1.2	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^2-6x+7}{5x^2-9}$	$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{4x^2-5x-21}{2x^2-3x-9}$	$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{tg} x}{1-\cos 2x}$
1.3	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+2x+1}{3x^2+x-1}$	$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{4x^2-14x+6}{x^2-4x+3}$	$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2-16}{\sqrt{x}-2}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin 3x}{1-\cos 4x}$
1.4	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2+7x-1}{3x^2+x+4}$	$\lim_{x \rightarrow -4} \frac{2x^2+5x-12}{2x^2+6x-8}$	$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x-2}-1}$	$\lim_{x \rightarrow -2} (5+2x)^{\frac{3}{x+2}}$
1.5	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3+1}{3x^3-7x+2}$	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2-x-2}{2x^2+5x-7}$	$\lim_{x \rightarrow 10} \frac{\sqrt{x-9}-1}{x^2-9x-10}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^2 x}{x \sin 2x}$
1.6	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+4x-x^2}{2+3x+2x^2}$	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{3x^2-5x-2}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3-x}-\sqrt{3+x}}{5x}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 5x}{x^2}$
1.7	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2-1}{4x^2-x+5}$	$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2-1}{x^2+3x+2}$	$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x}-2}{2x^2-5x-12}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sin^2 12x}$
1.8	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2-3x+1}{6x^2+3x-5}$	$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2+3x+2}{2x^2+5x+2}$	$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{2x-2}-2}{\sqrt{x+1}-2}$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{10x-3}{10x+1} \right)^{5x}$
1.9	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)^2}{2x^2}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^3-(1+3x)}{2x^2+5x^5}$	$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{9-x^2}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$
1.10	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-1)^3}{2x^3-3x+2}$	$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2+4x+1}{11x^2+9x-2}$	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x^2}{\sqrt{x^2-3x+3}-1}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin 4x}{1-\cos^2 x}$
1.11	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2-3x}{2x+1}$	$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$	$\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x-5}-\sqrt{2}}{x^2-49}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos^2 3x}{9x^2}$
1.12	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2+3x-x^3}{2x+3x^2-4x^3}$	$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2+8x+12}{3x^2+5x-2}$	$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$	$\lim_{x \rightarrow 3} (4x-11)^{\frac{5x}{x-3}}$
1.13	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2+x-1}{3+x^2-x}$	$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x^2-11x+5}{5x^2-24x-5}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x}-2}{x}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 4x}{\sin 3x}$
1.14	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^4-8x^2+6}{x^4+3x-3}$	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}$	$\lim_{x \rightarrow 25} \frac{\sqrt{x}-5}{625-x^2}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \sin 8x \operatorname{ctg} 3x$
1.15	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{13x^2-x+4}{26x^2+5x+1}$	$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{3x^2-14x-5}{2x^2-11x+5}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x-6x^2}{\sqrt{3-x}-\sqrt{3}}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos 4x}{x \sin 3x}$
1.16	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3+5x^2-7x+1}{2x^3-x-3}$	$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2-x-14}{x^2+8x+12}$	$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{2x^2-9x+9}$	$\lim_{x \rightarrow -1} (2x+3)^{\frac{1}{x+1}}$

№	а)	б)	в)	г)
1.17	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^3 - 4x^2 + 1}{2x^3 + 2x^2 - 3}$	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 3x - 2}{x^2 + 6x - 16}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{7-x} - \sqrt{7+x}}{2x}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin x}$
1.18	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^4 - 4x^2 + 8}{2x^4 + 1}$	$\lim_{x \rightarrow 6} \frac{2x^2 - 72}{x^2 - 7x + 6}$	$\lim_{x \rightarrow -4} \frac{\sqrt{x+12} - \sqrt{4-x}}{x^2 + 2x - 8}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ctg} 5x}{\sin 3x}$
1.19	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 9}{7x^3 + 10x + 5}$	$\lim_{x \rightarrow -4} \frac{5x^2 + 9x - 44}{2x^2 + 5x - 12}$	$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x^2 - 7x - 4}{\sqrt{4+x} - \sqrt{2x}}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sin^2 6x}$
1.20	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 + 6x^2 - x + 4}{5x^3 - 3x^2 + 2x + 1}$	$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{20 + x - x^2}{3x^2 - 11x - 20}$	$\lim_{x \rightarrow -5} \frac{\sqrt{3x+17} - \sqrt{2x+12}}{x^2 + 8x + 15}$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{13x+2}{13x-15} \right)^{x+7}$

Задание № 2. Дифференцирование функций одной переменной.

Найдите производные функций.

- 2.1. а) $y = x^3 - 6x^2 + 2x - 1$, б) $y = (x^3 + 1)\sin 3x$, в) $y = \frac{1+e^x}{1-e^x}$;
- 2.2. а) $y = 2x^4 - 5x^2 + 1$ б) $y = \frac{1+e^x}{1-e^x}$, в) $y = \operatorname{arctg} \sqrt{x^2 - 1}$;
- 2.3. а) $y = \frac{\sin 2x}{2x+1}$ б) $y = x^3 - 6x^2 + 2x - 1$, в) $y = \sqrt{x + \sqrt{x}}$;
- 2.4. а) $y = 4x^5 - 6x^3 + 2x$ б) $y = (x^2 + 1)\cos 3x$ в) $y = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{3-x}{x-2}}$;
- 2.5. а) $y = 3x^5 - 6x^3 + 2x$ б) $y = \frac{\cos x}{x^2}$ в) $y = \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt[3]{x^3 + 1}$;
- 2.6. а) $y = 4x - x^3 + 7x^8$ б) $y = \arccos \frac{1}{x}$ в) $y = \ln \sqrt{\frac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x}} - x$;
- 2.7. а) $y = 2x^3 - 4x + 1$ б) $y = (x^2 + 6x - 1)e^{2x}$ в) $y = \ln \sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\cos x}}$;
- 2.8. а) $y = 2x^3 - 4x + 1$ б) $y = \frac{4\ln x}{1-\ln x}$ в) $y = \ln(e^x + \sqrt{1+e^{2x}})$;
- 2.9. а) $y = \frac{4\sin 3x}{x^2 - 4x + 1}$ б) $y = (x-1)\cos 2x$ в) $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x^2 - 1}}$;
- 2.10. а) $y = 3x^2 + 7x + 1$ б) $y = (3x-1)e^x$ в) $y = \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}}$;
- 2.11. а) $y = 10 + 2x^3 - \frac{x^4}{4}$ б) $y = \frac{\ln x}{3x+1}$ в) $y = \operatorname{tg}^2(x^3 + 1)$;
- 2.12. а) $y = 3x^3 - 2x^2 + x - 4$ б) $y = \frac{\cos 3x}{x^3 + x^2 + 1}$ в) $y = \operatorname{arctg} \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}$;
- 2.13. а) $y = 3 - 2x + 6x^3 - 8x^7$ б) $y = (x^2 + 1)\operatorname{tg} 4x$ в) $y = \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \sqrt{x}$;
- 2.14. а) $y = 18x^7 + 14x^2 + 8x$ б) $y = e^x \sin x$ в) $y = \sin^2 3x$;
- 2.15. а) $y = x^5 + 6x^4 - 7x$ б) $y = (5x+1)\operatorname{arctg} 2x$ в) $y = \sqrt{1+\ln^2 x}$;
- 2.16. а) $y = (x^2 - 8)\cos 3x$ б) $y = \frac{3x}{\sin 2x}$ в) $y = \operatorname{arctg} \sqrt{x^2 - 1}$;
- 2.17. а) $y = 3 - 2\sqrt{x} + 6x^3$ б) $y = (x^2 + 1)\operatorname{tg} 4x$ в) $y = \ln \sqrt{\frac{\sin x}{1+2\cos x}}$;
- 2.18. а) $y = 18x^{-1} + 14x^{-2} + 8x$ б) $y = e^{-x} \sin 2x$ в) $y = 3\sqrt[3]{x^5 + 5x^4 - \frac{5}{x}}$;
- 2.19. а) $y = x^5 + 6\frac{1}{x^3} - 7\sqrt[3]{x} + 7$ б) $y = (5x^2 + 1)\operatorname{tg} 2x$ в) $y = \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}}$;
- 2.20. а) $y = (x^2 + 8)\sqrt{2x+1}$ б) $y = \frac{3x^2}{\operatorname{tg} 2x}$ в) $y = \arccos(e^x)$

Задание №3. Исследование функций и построение графиков

Исследуйте функцию и постройте ее график.

$$3.1. \quad y = \frac{x}{(x-1)^2}.$$

$$3.2. \quad y = \frac{x^3 + 16}{x}.$$

$$3.3. \quad y = \frac{x^3 - 1}{4x^2}.$$

$$3.4. \quad y = \frac{x-1}{x^2 - 2x}.$$

$$3.5. \quad y = \frac{x^3}{2(x+1)^2}.$$

$$3.6. \quad y = \frac{x^2 + 1}{x}.$$

$$3.7. \quad y = \frac{2x-1}{(x-1)^2}.$$

$$3.8. \quad y = \frac{4x^2}{x^3 - 1}.$$

$$3.9. \quad y = \frac{x}{3 + x^2}.$$

$$3.10. \quad y = \frac{2x}{1 + x^2}.$$

$$3.11. \quad y = \frac{x^3 + 3}{x}.$$

$$3.12. \quad y = \frac{x^2 + 4}{x}.$$

$$3.13. \quad y = \frac{x^2 - 2x + 3}{x-1}.$$

$$3.14. \quad y = \frac{x}{x^2 + 5}.$$

$$3.15. \quad y = \frac{2x-8}{(x-3)^3}.$$

$$3.16. \quad y = \frac{2x}{(x-2)^2}.$$

$$3.17. \quad y = \frac{x^4}{x^3 - 1}.$$

$$3.18. \quad y = \frac{x+3}{2(x+2)^2}.$$

$$3.19. \quad y = \frac{2x}{x^2 + 1}.$$

$$3.20. \quad y = \frac{16x^2}{x-4}.$$

Задание №4. Неопределенный интеграл.

Вычислите неопределенные интегралы:

- | | | |
|--|----------------------------------|--------------------------------------|
| 4.1. а) $\int (x^3 - 6x^2 + 7)dx$ | б) $\int \frac{dx}{5x+1}$ | в) $\int x \sin x dx$ |
| 4.2. а) $\int (x^4 - 5x^3 + 2x - 1)dx$ | б) $\int \frac{dx}{(2x-20)^3}$ | в) $\int x \cos 2x dx$ |
| 4.3. а) $\int (3x^2 + 6x - 7)dx$ | б) $\int \frac{dx}{(5x-1)^3}$ | в) $\int \cos^2 x \sin x dx$ |
| 4.4. а) $\int (5x^4 - 6x^2 + 7)dx$ | б) $\int \frac{dx}{6x+1}$ | в) $\int \arctg x dx$ |
| 4.5. а) $\int (x^3 - 6x^5 + 2x^2 - 3)dx$ | б) $\int \frac{dx}{(2x-3)^4}$ | в) $\int tg^2 x \frac{dx}{\cos^2 x}$ |
| 4.6. а) $\int (x^8 - 6x^5 + 2x^2 - 3)dx$ | б) $\int \frac{dx}{(3x+2)^3}$ | в) $\int \arcc tg x dx$ |
| 4.7. а) $\int (x^3 - 2x^2 - 5x + 1)dx$ | б) $\int \frac{dx}{(5x-4)^7}$ | в) $\int \ln x dx$ |
| 4.8. а) $\int (x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 6)dx$ | б) $\int \frac{dx}{(6x-1)^8}$ | в) $\int \frac{x^2}{1-x^3} dx$ |
| 4.9. а) $\int (x^7 - 3x^4 + 2x + 5)dx$ | б) $\int \frac{dx}{4x+1}$ | в) $\int \frac{x}{x^2+5} dx$ |
| 4.10. а) $\int (x^7 - 3x^4 + 2x + 3)dx$ | б) $\int \frac{dx}{4x-1}$ | в) $\int 3x \cos x dx$ |
| 4.11. а) $\int (x^3 - 2x^2 + 3x + 8)dx$ | б) $\int \frac{dx}{(5x+2)^4}$ | в) $\int x \ln x dx$ |
| 4.12. а) $\int (x - 3x^2 + 5x^4)dx$ | б) $\int \frac{dx}{(8x-7)^3}$ | в) $\int 2x \sin 2x dx$ |
| 4.13. а) $\int (x^4 + 6x^5 - x^2 + 2)dx$ | б) $\int \frac{dx}{(3x-5)^4}$ | в) $\int x \cos 3x dx$ |
| 4.14. а) $\int (x^6 - 2x^3 - 5)dx$ | б) $\int \frac{dx}{(5x-7)^4}$ | в) $\int 3x \sin x dx$ |
| 4.15. а) $\int (7 - 3x + 8x^4 - 6x^3)dx$ | б) $\int \frac{dx}{6x-11}$ | в) $\int 3 \arctg 3x dx$ |
| 4.16. а) $\int (x^3 + x^2 - 7x + 9)dx$ | б) $\int \frac{dx}{(18x-3)^2}$ | в) $\int \arcsin x dx$ |
| 4.17. а) $\int \left(x^2 + 2x + \frac{1}{x} \right) dx$ | б) $\int \frac{dx}{(2x-1)^3}$ | в) $\int (x+1) \cos x dx$ |
| 4.18. а) $\int (x^4 - 2x^2 - 5)dx$ | б) $\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x}}$ | в) $\int (x+1) \ln x dx$ |
| 4.19. а) $\int (7 - 3x + 3x^2 - 6x^{-3})dx$ | б) $\int \frac{3dx}{7x+3}$ | в) $\int 5 \arcc tg x dx$ |
| 4.20. а) $\int (4x^3 + 3x^2 + 3x + 1)dx$ | б) $\int \frac{dx}{(x-3)^3}$ | в) $\int (2x+4) \cos x dx$ |

Задание №5. Определенный интеграл.

Вычислите определенные интегралы:

5.1. а) $\int_{-1}^2 (x^3 - 6x^2 + x) dx$

б) $\int_0^{\pi/4} \sin x \sin 7x dx$

5.2. а) $\int_{-1}^2 (x^3 - x^2 + 2) dx$

б) $\int_0^{\pi/3} (x-1) \cos 3x dx$

5.3. а) $\int_5^6 (x^3 - x^2 + 1) dx$

б) $\int_1^3 \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx$

5.4. а) $\int_{-2}^1 (x^3 - 3x + 1) dx$

б) $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1}{\sin^2 x} dx$

5.5. а) $\int_3^4 (x^3 + 6x - 1) dx$

б) $\int_1^3 \frac{1}{x^2} 2^{\frac{1}{x}} dx$

5.6. а) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sin 3x dx$

б) $\int_0^{\pi} \sin 3x dx$

5.7. а) $\int_1^2 2^{3x} dx$

б) $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{5x}} dx$

5.8. а) $\int_{-2}^2 (x^2 + 6x - 1) dx$

б) $\int_1^e \ln x dx$

5.9. а) $\int_{-3}^4 (x^3 - 6x + 2) dx$

б) $\int_0^1 \arctg x dx$

5.10. а) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sin 5x dx$

б) $\int_0^{\pi/4} x \cos x dx$

5.11. а) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cos 4x dx$

б) $\int_{-3}^4 (x^2 + 6x - 1) dx$

5.12. а) $\int_0^1 \sqrt{x+1} dx$

б) $\int_0^1 x e^{-x} dx$

5.13. а) $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos x} \sin x dx$

б) $\int_0^1 x^2 \sqrt{x^3 + 1} dx$

5.14. а) $\int_{-2}^3 (x^4 - 6x + 8) dx$

б) $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2 + 1}$

5.15. а) $\int_{-3}^4 (x^3 - 6x + 2) dx$

б) $\int_1^e \ln x dx$

$$5.16. \text{ a) } \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1}{\sin^2 x} dx$$

$$5.17. \text{ a) } \int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos^3 x} \sin x dx$$

$$5.18. \text{ a) } \int_{-2}^3 (5x^4 - 2x + 1) dx$$

$$5.19. \text{ a) } \int_{-3}^4 (4x^3 + 2x + 3) dx$$

$$5.20. \text{ a) } \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos^2 x} dx$$

$$\text{б) } \int_0^1 x^2 \sqrt{1+x^3} dx$$

$$\text{б) } \int_0^1 x^3 \sqrt{x^4+1} dx$$

$$\text{б) } \int_{-1/2}^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\text{б) } \int_1^e x \ln x dx$$

$$\text{б) } \int_0^1 x \sqrt{1+x^2} dx$$

Задание №6. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:

- 6.1. $y = 4 - x^2, y = 0$;
6.2. $y = x^2, y = 6 - x, y = 0$;
6.3. $y^2 = 4x, y = 0, x = 4, x = 9$
6.4. $y = e^x, y = e^{-x}, x = 1$;
6.5. $y = 4 - x^2, y = x + 2$;
6.6. $y = x^2, 2x - y + 3 = 0$;
6.7. $xy = 4, x + y = 5$;
6.8. $y = x, x + y = 5, x = 4$;
6.9. $y = \sin x, y = x, x = \frac{\pi}{2}$;
6.10. $y = \frac{x^2}{3}, y = -\frac{2}{3}x^2 + 4$;
6.11. $y = \operatorname{tg} x, x = \frac{\pi}{3}, y = 0$;
6.12. $y = \ln x, x = e, y = 0$;
6.13. $y = x^2 - 2x + 4, x = 1, y - 4 = x$;
6.14. $x - 2y + 4 = 0, x + y - 5 = 0, y = 0$;
6.15. $y = -\frac{1}{3}x^2 + 3, y = 0, x = 0, x = 3$;
6.16. $y = 4x - x^2, y = 0$;
6.17. $y = x^2, 5x - y - 6 = 0$;
6.18. $y = \frac{1}{4}x^2, y = -\frac{1}{2}x^2 + 3x$;
6.19. $y = -x^2 + 6, y = 2x + 3$;
6.20. $y = x^2 - 2x + 3, y = 0, x = 0, x = 3$.

Задание №7. Основные понятия и методы линейной алгебры.

Решите систему линейных уравнений:

- а) методом Крамера;
 б) методом Гаусса;
 в) матричным методом.
 Выполните проверку.

$$7.1. \quad \begin{cases} 2x - 3y - 5z = 1 \\ 3x + y - 2z = -4 \\ x - 2y + z = 5 \end{cases}$$

$$7.2. \quad \begin{cases} x - y + 3z = -4 \\ 2x + 3y - z = 2 \\ 3x + 5y + z = 4 \end{cases}$$

$$7.3. \quad \begin{cases} 2x - y - 2z = 8 \\ 2x + y + 3z = 3 \\ x - 3y + z = 2 \end{cases}$$

$$7.4. \quad \begin{cases} 4x + 3y - 2z = -1 \\ 3x + y + z = 3 \\ x - 2y - 3z = 8 \end{cases}$$

$$7.5. \quad \begin{cases} 2x + y - z = -5 \\ 3x - 2y + 2z = 3 \\ 5x - y + 3z = 4 \end{cases}$$

$$7.6. \quad \begin{cases} 5x - 2y + z = -1 \\ 2x + y + 2z = 6 \\ x - 3y - z = -5 \end{cases}$$

$$7.7. \quad \begin{cases} x - 2y - 3z = 8 \\ 2x + y - z = 3 \\ 3x + 3y + 2z = -1 \end{cases}$$

$$7.8. \quad \begin{cases} x - 2y + z = 5 \\ 2x - 3y - 5z = 1 \\ 3x + 5y - 2z = -1 \end{cases}$$

$$\begin{array}{ll}
7.9. & \begin{cases} 2x + 3y - z = 7 \\ x - 2y - 3z = 8 \\ 3x + y - 8z = 11 \end{cases} \\
7.10. & \begin{cases} x - 2y - 3z = 8 \\ 3x + y + z = 3 \\ 4x + 3y - 2z = -1 \end{cases} \\
7.11. & \begin{cases} 4x - 3y - 2z = -1 \\ x + 2y + 3z = 8 \\ 2x - y + 3z = 1 \end{cases} \\
7.12. & \begin{cases} 3x + 4y + z = -2 \\ 2x + y + 3z = 5 \\ x - 2y + z = 4 \end{cases} \\
7.13. & \begin{cases} 3x + y + 2z = -4 \\ x - 2y - z = -1 \\ 2x + 3y + 2z = 0 \end{cases} \\
7.14. & \begin{cases} 2x + 3y - z = 2 \\ x + 2y + 3z = 0 \\ x - y - 2z = 6 \end{cases} \\
7.15. & \begin{cases} 2x + y + 3z = 5 \\ 3x + 4y + z = -2 \\ x - 2y + z = 4 \end{cases} \\
7.16. & \begin{cases} x - 4y + z = 0 \\ x + 5y - z = 1 \\ 2x + y - 2z = 7 \end{cases} \\
7.17. & \begin{cases} 3x + 4y - z = -4 \\ 2x + 3y + z = -1 \\ -x + y + 2z = 3 \end{cases} \\
7.18. & \begin{cases} 3x + y - 2z = -1 \\ x + 2y - z = 1 \\ 2x - 3y + z = -2 \end{cases}
\end{array}$$

$$\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} 3x + 2y - z = 4 \\ x - 2y - 2z = 3 \\ -x + y + z = -2 \end{array} \right. \\ \mathbf{7.19.} \quad \left\{ \begin{array}{l} 2x + 3y - z = 5 \\ x - 2y + 3z = -1 \end{array} \right. \\ \mathbf{7.20.} \quad \left\{ \begin{array}{l} 3x + 2y + 2z = 4 \end{array} \right. \end{array}$$

Задание №8. Элементы теории вероятностей.

Решите задачу:

8.1. В ящике 40 шаров: 28 черных и 12 синих. Из ящика вынимают один шар. Найти вероятности событий:

- а) выбранный шар черный;
- б) выбранный шар синий.

8.2. Среди кандидатов на премирование 3 первокурсника, 5 второкурсников и 7 третьекурсников. Из них избирают 5 человек. Найти вероятность событий:

- а) среди выбранных только третьекурсники;
- б) среди выбранных не будет первокурсников.

8.3. Бросают два игральных кубика. Найти вероятности событий:

- а) число очков на обоих кубиках одинаково;
- б) сумма очков четная.

8.4. Наугад избирается пятизначное число. Найти вероятности событий:

- а) число читается одинаково слева направо и справа налево;
- б) число делится на пять.

8.5. Из партии в 10 изделий, среди которых 3 бракованных, наугад берут три изделия для контроля. Найти вероятности событий:

- а) среди выбранных ровно два бракованных изделия;
- б) среди выбранных все изделия бракованные.

8.6. Из колоды карт в 52 листа вытягивают наугад 4 карты. Найти вероятности событий:

- а) среди выбранных все карты бубновой масти;
- б) среди выбранных все карты одной масти.

8.7. Числа 1, 2, 3 9 записываются в случайном порядке. Найти вероятности событий:

- а) числа будут записаны в порядке возрастания;
- б) числа 1 и 2 будут стоять рядом и в порядке возрастания.

8.8. Из телефонной книги наугад набирается случайный номер телефона (все номера шестизначные). Найти вероятности событий:

- а) три последних цифры одинаковые;
- б) все цифры разные.

8.9. В коробке лежат цветные шары: 7 красных, 8 белых и 5 черных. Наугад достают три шара. Найти вероятности событий:

- а) среди отобранных шаров все белые;
- б) среди отобранных 2 черных и 1 красный шар.

8.10. Есть 3 ящика, в первом из них белых шариков – 15%, во втором – 20%, в третьем – 10%. Из каждого ящика наугад берут один шарик. Найти вероятности событий:

- а) все три шарика будут белыми;
- б) среди вынутых шариков не будут белых.

8.11. На карточках написаны первые 10 букв русского алфавита. Отбирают по одной 4 карточки и, выкладывая их в порядке отбора, составляют слово. Найти вероятности событий:

- а) слово заканчивается на букву "А";
- б) будет получено слово "БЕДА".

8.12. Десять вариантов контрольных работ, написанных на отдельных карточках, перемешиваются и распределяются среди восьми студентов, которые сидят в одном ряду. Найти вероятности событий:

- а) варианты с номерами 1 и 2 останутся неиспользованными;
- б) варианты 1 и 2 достанутся студентам, которые сидят рядом;

8.13. На пяти карточках написаны цифры от одного до пяти. Случайным образом отбирают три карточки и раскладывают их в порядке отбора в ряд слева направо. Найти вероятности событий:

- а) появится число 123;
- б) появится число, которое не содержит цифру 3.

8.14. На пяти карточках написаны цифры от одного до пяти. Случайным образом отбирают три карточки и раскладывают их в порядке отбора в ряд слева направо. Найти вероятности событий:

- а) появится четное число;
- б) появится число, которое содержит хотя бы одну цифру 2.

8.15. Из 100 деталей партии 97 стандартных и 3 бракованных. Найти вероятности событий:

- а) среди выбранных 5 деталей нет бракованных;
- б) среди выбранных наугад 6 деталей 4 стандартные.

8.16. На полке наугад расставляют 12 книг, среди которых, – 5 по химии и 7 по биологии. Найти вероятности событий:

- а) на полке окажутся сначала все книги по химии, а затем все книги по биологии;
- б) последняя книга на полке будет по химии.

8.17. Бросают 3 игральных кубика. Найти вероятности событий:

- а) по крайней мере на одном кубике выпадет число, которое делится на 3;
- б) сумма очков будет 18.

8.18. В двух урнах лежит по 10 шариков, причем в первой из них – 7 красных, а во второй – 4 красных. Из каждой урны наугад вытягивают по одному шарiku. Найти вероятности событий:

- а) среди вытянутых шариков будет точно 1 красный;
- б) среди вытянутых шариков не будет красных.

8.19. Числа 1, 2, 3 9 записываются в случайном порядке. Найти вероятности событий:

- а) числа будут записаны в порядке убывания;
- б) числа 4 и 3 будут стоять рядом и в порядке убывания.

8.20. Из телефонной книги наугад набирается случайный номер телефона (все номера пятизначные). Найти вероятности событий:

- а) три первых цифры одинаковые;
- б) все цифры разные.

Задание №9. Элементы математической статистики.

Дискретная случайная величина задана рядом распределения.

Необходимо:

- а) записать пропущенную вероятность;
- б) подсчитать вероятности попаданий в указанные интервалы;
- в) вычислить числовые характеристики случайной величины M_x , D_x , σ_x .

9.1.

$x_{и}$	1	3	7	9	12	14
$p_{и}$	0,1	0,2		0,4	0,05	0,15

$P(X=2)$; $P(X=9)$; $P(X<5)$; $P(X>8)$; $P(4<X<13)$; $P(10<X<20)$;

9.2.

$x_{и}$	3	4	6	8	13	18
$p_{и}$	0,15	0,20	0,10	0,35		0,05

$P(X=9)$; $P(X=4)$; $P(X<8)$; $P(X>2)$; $P(5<X<11)$; $P(70<X<40)$

9.3.

$x_{и}$	0	2	4	5	9	11
$p_{и}$	0,20	0,05	0,15		0,4	0,10

$P(X=5)$; $P(X=7)$; $P(X<3)$; $P(X>6)$; $P(2<X<10)$; $P(7<X<100)$

9.4.

$x_{и}$	1	4	5	8	11	14
$p_{и}$	0,10	0,10	0,25		0,10	0,05

$P(X=11)$; $P(X=0)$; $P(X<10)$; $P(X>4)$; $P(5<X<13)$; $P(3<X<30)$

9.5.

$x_{и}$	0	2	5	9	12	16
$p_{и}$	0,10		0,15	0,05	0,25	0,05

$P(X=12)$; $P(X=6)$; $P(X<7)$; $P(X>2)$; $P(5<X<14)$; $P(10<X<30)$;

9.6.

$x_{и}$	1	4	5	8	10	12
$p_{и}$	0,05	0,15	0,05	0,20	0,10	

$P(X=3)$; $P(X=5)$; $P(X<8)$; $P(X>6)$; $P(3<X<9)$; $P(5<X<25)$

9.7.

$x_{и}$	3	5	7	9	13	14
---------	---	---	---	---	----	----

p_{ii}	0,05	0,05	0,25	0,35		0,10
----------	------	------	------	------	--	------

$P(X=1)$; $P(X=7)$; $P(X<8)$; $P(X>5)$; $P(6<X<15)$; $P(10<X<30)$

9.8.

x_{ii}	6	7	9	11	14	17
p_{ii}	0,35		0,15	0,05	0,10	0,10

$P(X=4)$; $P(X=9)$; $P(X<10)$; $P(X>7)$; $P(2<X<9)$; $P(6<X<26)$

9.9.

x_{ii}	0	5	7	8	11	15
p_{ii}		0,05	0,10	0,10	0,35	0,10

$P(X=3)$; $P(X=15)$; $P(X<6)$; $P(X>9)$; $P(2<X<12)$; $P(7<X<25)$

9.10.

x_{ii}	2	6	9	12	14	16
p_{ii}	0,25	0,15	0,10		0,05	0,05

$P(X=1)$; $P(X=12)$; $P(X<6)$; $P(X>7)$; $P(3<X<15)$; $P(8<X<80)$

9.11.

x_{ii}	1	3	5	12	14	16
p_{ii}	0,25	0,15		0,10	0,05	0,05

$P(X=1)$; $P(X=12)$; $P(X<6)$; $P(X>7)$; $P(3<X<15)$; $P(8<X<20)$

9.12.

x_{ii}	2	4	6	10	14	16
p_{ii}		0,15	0,10	0,20	0,05	0,05

$P(X=1)$; $P(X=12)$; $P(X<6)$; $P(X>7)$; $P(3<X<15)$; $P(8<X<80)$

9.13.

x_{ii}	2	6	9	12	14	16
p_{ii}		0,15	0,10	0,3	0,05	0,05

$P(X=1)$; $P(X=12)$; $P(X<6)$; $P(X>7)$; $P(3<X<15)$; $P(9<X<20)$

9.14.

x_{ii}	1	3	5	7	11	14
p_{ii}	0,25	0,15	0,10		0,05	0,05

$P(X=1)$; $P(X=7)$; $P(X<6)$; $P(X>7)$; $P(3<X<15)$; $P(10<X<30)$

9.15.

x_i	2	6	9	12	14	16
p_i	0,25		0,10	0,10	0,05	0,05

$P(X=1)$; $P(X=12)$; $P(X<6)$; $P(X>7)$; $P(3<X<15)$; $P(8<X<80)$

9.16.

x_i	2	6	9	12	14	16
p_i	0,25	0,15	0,10	0,05	0,05	

$P(X=2)$; $P(X=7)$; $P(X<6)$; $P(X>7)$; $P(3<X<15)$; $P(8<X<80)$

9.17.

x_i	2	6	9	12	14	16
p_i	0,20	0,10	0,10		0,01	0,05

$P(X=5)$; $P(X=12)$; $P(X<6)$; $P(X>7)$; $P(3<X<15)$; $P(5<X<25)$

9.18.

x_i	2	4	9	12	14	15
p_i	0,15	0,15	0,15		0,05	0,05

$P(X=1)$; $P(X=12)$; $P(X<6)$; $P(X>7)$; $P(3<X<15)$; $P(8<X<17)$

9.19.

x_i	2	6	9	11	14	16
p_i	0,25	0,10	0,10		0,05	0,05

$P(X=1)$; $P(X=12)$; $P(X<6)$; $P(X>7)$; $P(3<X<15)$; $P(8<X<80)$

9.20.

x_i	2	6	9	12	13	14
p_i	0,25	0,15	0,10		0,05	0,05

$P(X=1)$; $P(X=12)$; $P(X<6)$; $P(X>7)$; $P(3<X<15)$; $P(8<X<80)$

Задание №10. Процентные вычисления.

Решите задачу:

а) Сколько денежных средств будет на вкладе через год, если положить n тыс. руб. под $m\%$?

б) Определите сумму подоходного налога, если заработная плата составляет k руб.

в) Определите размер заработной платы, если сумма подоходного налога составляет t руб.

Вариант	n	m	k	t
10.1.	5	16,5	28 503	6 200
10.2.	10	7,3	38 218	4 523
10.3.	15	14,1	70 301	5 334
10.4.	20	5,8	44 012	6 758
10.5.	25	7,4	22 129	4 356
10.6.	30	2,7	38 297	5 839
10.7.	35	13,5	42 246	4 581
10.8.	40	4,9	56 370	2 891
10.9.	45	6,3	30 088	10 054
10.10.	50	8,4	49 991	7 120
10.11.	55	11,5	29 335	3 849
10.12.	60	12,2	44 135	4 002
10.13.	65	10,6	25 084	8 572
10.14.	70	8,1	63 222	3 041
10.15.	75	7,2	57 127	6 890
10.16.	80	9,4	31 052	5 355
10.17.	85	13,8	58 701	4 121
10.18.	90	10,3	32 147	2 933
10.19.	95	5,5	27 277	9 456
10.20.	100	15,9	65 119	3 897

Выполните расчеты, исходя из ставки подоходного налога НДФЛ 13%.
Округлите результаты до целого значения.

Примеры выполнения заданий контрольной работы

Задание № 1. Найдите пределы функций (не пользуясь правилом Лопиталя).

а) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 14x - 32}{x^2 - 6x + 8};$

б) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 14x - 32}{x^2 - 6x + 8};$

в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 + 1}{7x^5 + 2x + 3};$

г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x^2};$

д) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{x};$

е) $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2};$

ж) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^x;$

з) $\lim_{x \rightarrow 2} (3x-5)^{\frac{1}{x-2}}.$

а) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 14x - 32}{x^2 - 6x + 8}.$

Решение.

Для вычисления данного предела подставим значение $x = -1$ в функцию, стоящую под знаком предела. Получим,

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 14x - 32}{x^2 - 6x + 8} = \frac{(-1)^2 + 14 \cdot (-1) - 32}{(-1)^2 - 6 \cdot (-1) + 8} = \frac{-45}{15} = -3.$$

Ответ: -3.

б) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 14x - 32}{x^2 - 6x + 8}.$

Решение.

$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 14x - 32) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 6x + 8) = 0.$ Следовательно, имеем дело с неопределенностью вида $\left\{ \frac{0}{0} \right\}.$

Для раскрытия неопределенности $\left\{ \frac{0}{0} \right\}$ в этом случае, нужно разложить числитель и знаменатель на множители и сократить дробь на общий множитель.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 14x - 32}{x^2 - 6x + 8} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+16)}{(x-2)(x-4)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+16}{x-4} = \frac{2+16}{2-4} = -9.$$

Ответ: -9.

в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 + 1}{7x^5 + 2x + 3}.$

Решение.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (5x^2 + 1) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (7x^5 + 2x + 3) = \infty. \quad \text{Следовательно, имеем дело с}$$

неопределенностью вида $\left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\}.$

Для раскрытия этой неопределенности и использовании теоремы о пределе отношения двух функций выделим в числителе и в знаменателе x в старшей для числителя и знаменателя степени в качестве сомножителя и сократим дробь.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 + 1}{7x^5 + 2x + 3} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 \left(\frac{5}{x^3} + \frac{1}{x^5} \right)}{x^5 \left(7 + \frac{2}{x^4} + \frac{3}{x^5} \right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{5}{x^3} + \frac{1}{x^5}}{7 + \frac{2}{x^4} + \frac{3}{x^5}} = \frac{0}{7} = 0.$$

Ответ: 0.

Следует заметить, что при вычислении пределов вида

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + b_{m-2} x^{m-2} + \dots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0}$$

удобно использовать следующую схему:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + b_{m-2} x^{m-2} + \dots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0} = \begin{cases} \infty, & \text{если } n > m, \\ \frac{a_n}{b_m}, & \text{если } n = m. \\ 0, & \text{если } n < m \end{cases}$$

г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x^2}.$

Решение.

$\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{x^2 + 1} - 1) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0.$ Следовательно, имеем дело с неопределенностью вида $\left\{ \frac{0}{0} \right\}.$

Для раскрытия неопределенности $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ в этом случае, нужно умножить числитель и знаменатель на выражение, сопряженное числителю, а затем сократить дробь на общий множитель.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x^2+1}-1)(\sqrt{x^2+1}+1)}{x^2(\sqrt{x^2+1}+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2(\sqrt{x^2+1}+1)} = \frac{1}{2}.$$

Ответ: $\frac{1}{2}$.

д) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{x}$.

Решение.

Для раскрытия неопределенности $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ в этом случае, нужно выделить первый замечательный предел: $\lim_{A \rightarrow 0} \frac{\sin A}{A} = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{x} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{k \sin kx}{kx} = k \cdot 1 = k.$$

Ответ: k .

е) $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$.

Решение.

Для раскрытия неопределенности $\{0 \cdot \infty\}$ в этом случае, нужно произведение преобразовать в частное, то есть неопределенность $\{0 \cdot \infty\}$ свести к неопределенности $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ или $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} &= \{0 \cdot \infty\} = \lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \frac{\sin \frac{\pi x}{2}}{\cos \frac{\pi x}{2}} = \left[\sin \frac{\pi x}{2} = 1, \text{ при } x=1 \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{\cos \frac{\pi x}{2}} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \\ &= \left[\begin{array}{l} y = x-1, \\ y \rightarrow 0, x = y+1 \end{array} \right] = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-y}{\cos \frac{\pi}{2}(y+1)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-y}{\cos \left(\frac{\pi}{2}y + \frac{\pi}{2} \right)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-y}{-\sin \frac{\pi}{2}y}. \end{aligned}$$

Выделяем первый замечательный предел, то есть, умножаем числитель и знаменатель на $\frac{\pi}{2}$. Получаем,

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{-\frac{\pi}{2}y}{-\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}y} = \frac{1}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}.$$

Ответ: $\frac{2}{\pi}$.

ж) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^x.$

Решение.

Для раскрытия неопределенности $\{1^\infty\}$ в этом случае, нужно выделить второй замечательный предел: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e.$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^x = \{1^\infty\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[1 + \left(\frac{x-1}{x+1} - 1 \right) \right]^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{-2}{x+1} \right]^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x+1}{-2}} \right)^{\frac{-2}{x+1}x} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x}{x+1}} = e^{-2}.$$

Ответ: e^{-2} .

з) $\lim_{x \rightarrow 2} (3x-5)^{\frac{1}{x-2}}.$

Решение.

Для раскрытия неопределенности $\{1^\infty\}$ в этом случае, нужно выделить второй замечательный предел: $\lim_{\alpha \rightarrow 0} (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e.$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (3x-5)^{\frac{1}{x-2}} = \left[\begin{array}{l} y = x-2, \\ x = y+2, y \rightarrow 0 \end{array} \right] = \lim_{y \rightarrow 0} (3(y+2)-5)^{\frac{1}{y}} = \lim_{y \rightarrow 0} (1+3y)^{\frac{1 \cdot 3}{y \cdot 3}} = e^3.$$

Ответ: e^3 .

Задание № 2. Найдите производные функций.

Процесс нахождения производной функции называется дифференцированием. Техника дифференцирования основана на таблице производных элементарных функций и правилах дифференцирования (теоремах о производной), которые приведены ниже.

Таблица производных элементарных функций

- | | |
|---|---|
| 1. $c' = 0, c = \text{const}$ | |
| 2. $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$ | 3. $x' = 1$ |
| 4. $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ | 5. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ |
| 6. $(a^x)' = a^x \ln a$ | 7. $(e^x)' = e^x$ |
| 8. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$ | 9. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ |
| 10. $(\sin x)' = \cos x$ | 11. $(\cos x)' = -\sin x$ |
| 12. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ | 13. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ |
| 14. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | 15. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| 16. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$ | 17. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$ |

Правила дифференцирования (теоремы о производной)

Пусть $u = u(x)$, $v = v(x)$ – дифференцируемые функции, $c = \text{const}$. Тогда

- $(u \pm v)' = u' \pm v'$.
- $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$.
- $(c \cdot u)' = c \cdot u'$.
- $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}, v \neq 0$.

Правило дифференцирования сложной функции

Если $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$, то есть $y = f(\varphi(x))$, где функции $f(u)$ и $\varphi(x)$ имеют производные, то

$$y_x' = y_u' u_x'.$$

а) $y = 3x^5 + 7x^4 - 2x^2 + 3x - 20$.

Решение.

Воспользуемся правилами 1 и 3 дифференцирования:

$$y' = 3(x^5)' + 7(x^4)' - 2(x^2)' + 3x' - 20'.$$

Применим формулы из таблицы производных

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}, \quad x' = 1, \quad c' = 0:$$

$$y' = 3 \cdot 5x^4 + 7 \cdot 4x^3 - 2 \cdot 2x + 3 \cdot 1 - 0;$$

$$y' = 15x^4 + 28x^3 - 4x + 3.$$

Ответ: $y' = 15x^4 + 28x^3 - 4x + 3$.

б) $y = \frac{x^3}{7} - \frac{7}{x^3}$.

Решение.

Представим функцию в виде: $y = \frac{1}{7}x^3 - 7x^{-3}$.

Воспользуемся правилами 1 и 3 дифференцирования:

$$y' = \frac{1}{7}(x^3)' - 7(x^{-3})'.$$

Применим формулу из таблицы производных $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$:

$$y' = \frac{1}{7} \cdot 3x^2 - 7 \cdot (-3x^{-4}) = \frac{3}{7}x^2 + 21x^{-4} = \frac{3}{7}x^2 + \frac{21}{x^4}.$$

Ответ: $y' = \frac{3}{7}x^2 + \frac{21}{x^4}$.

в) $y = 6\sqrt[3]{x} - 4\sqrt[4]{x}$.

Решение.

Представим функцию в виде:

$$y = 6\sqrt[3]{x} - 4\sqrt[4]{x} = 6 \cdot x^{\frac{1}{3}} - 4 \cdot x^{\frac{1}{4}}.$$

Воспользуемся правилами 1 и 3 дифференцирования и формулой из таблицы производных $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$:

$$\begin{aligned} y' &= (6 \cdot x^{\frac{1}{3}} - 4 \cdot x^{\frac{1}{4}})' = (6 \cdot x^{\frac{1}{3}})' - (4 \cdot x^{\frac{1}{4}})' = 6 \cdot \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} - 4 \cdot \frac{1}{4}x^{\frac{1}{4}-1} = 2x^{-\frac{2}{3}} - x^{-\frac{3}{4}} = \\ &= \frac{2}{x^{\frac{2}{3}}} - \frac{1}{x^{\frac{3}{4}}} = \frac{2}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}. \end{aligned}$$

Ответ: $y' = \frac{2}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$.

г) $y = \cos x - 2 \arctg x + \frac{\ln x}{10}$.

Решение.

Применим правила 1 и 3 дифференцирования и воспользуемся формулами из таблицы производных $(\cos x)' = -\sin x$, $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$:

$$y' = (\cos x)' - 2(\operatorname{arctg} x)' + \frac{1}{10}(\ln x)' = -\sin x - \frac{2}{1+x^2} + \frac{1}{10x}.$$

Ответ: $y' = -\sin x - \frac{2}{1+x^2} + \frac{1}{10x}$.

д) $y = 2^x * \lg x - 2 \operatorname{tg} 3 * \operatorname{ctg} x + 3$.

Решение.

Применим правила 1 – 3 дифференцирования и воспользуемся формулами из таблицы производных $(a^x)' = a^x \ln a$, $(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$, $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$, $c' = 0$:

$$y' = (2^x)' * \lg x + 2^x * (\lg x)' - 2 \operatorname{tg} 3 (\operatorname{ctg} x)' + 3';$$

$$y' = 2^x \ln 2 * \lg x + 2^x * \frac{1}{x \ln 10} - 2 \operatorname{tg} 3 \left(-\frac{1}{\sin^2 x} \right) + 0;$$

$$y' = 2^x \ln 2 \lg x + \frac{2^x}{x \ln 10} + \frac{2 \operatorname{tg} 3}{\sin^2 x}.$$

Ответ: $y' = 2^x \ln 2 \lg x + \frac{2^x}{x \ln 10} + \frac{2 \operatorname{tg} 3}{\sin^2 x}$.

е) $y = 4x^3 \arcsin x - x \log_5 x$.

Решение.

Применим правила 1 – 3 дифференцирования и воспользуемся формулами из таблицы производных $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$, $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x' = 1$,

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}:$$

$$y' = 4((x^3)' * \arcsin x + x^3 * (\arcsin x)') - (x' * \log_5 x + x * (\log_5 x)');$$

$$y' = 4 \left(3x^2 \arcsin x + x^3 * \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right) - \left(\log_5 x + x * \frac{1}{x \ln 5} \right);$$

$$y' = 12x^2 \arcsin x + \frac{12x^3}{\sqrt{1-x^2}} - \log_5 x - \frac{1}{\ln 5}.$$

Ответ: $y' = 12x^2 \arcsin x + \frac{12x^3}{\sqrt{1-x^2}} - \log_5 x - \frac{1}{\ln 5}$.

ж) $y = \frac{8 \sin x}{9^4 \sqrt{x}}$.

Решение.

Применим правила 1, 3, 4 дифференцирования и воспользуемся формулами из таблицы производных $(\sin x)' = \cos x$, $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$.

$$y' = \frac{8(\sin x)' \cdot 9\sqrt[4]{x} - 8 \sin x \cdot (9\sqrt[4]{x})'}{(9\sqrt[4]{x})^2};$$

$$y' = \frac{72 \cos x \cdot \sqrt[4]{x} - 8 \sin x \cdot 9\left(\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}\right)'}{81\sqrt[4]{x}};$$

$$y' = \frac{72 \sqrt[4]{x} \cos x - \frac{18 \sin x}{x^{\frac{3}{4}}}}{81\sqrt[4]{x}};$$

$$y' = \frac{72 x \cos x - 18 \sin x}{81\sqrt[4]{x} \cdot x^{\frac{3}{4}}} = \frac{8 x \cos x - 2 \sin x}{9x^{\frac{4}{4}}\sqrt[4]{x}}.$$

Ответ: $y' = \frac{8 x \cos x - 2 \sin x}{9x^{\frac{4}{4}}\sqrt[4]{x}}.$

з) $y = \ln \sqrt{2 \sin x + 1}.$

Решение.

Данная функция является сложной: $y = \ln u$, $u = \sqrt{2 \sin x + 1}$. По правилу дифференцирования сложной функции и формулам из таблицы производных $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $(\sin x)' = \cos x$, $c' = 0$ находим:

$$y' = \frac{1}{\sqrt{2 \sin x + 1}} (\sqrt{2 \sin x + 1})' = \frac{1}{\sqrt{2 \sin x + 1}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2 \sin x + 1}} (2 \sin x + 1)' =$$

$$= \frac{1}{2(2 \sin x + 1)} 2 \cos x = \frac{\cos x}{2 \sin x + 1}.$$

Ответ: $y' = \frac{\cos x}{2 \sin x + 1}.$

и) $y = \arcsin \frac{2x^2}{1+x^4}, |x| < 1.$

Решение.

Данная функция является сложной: $y = \arcsin u$, $u = \frac{2x^2}{1+x^4}$. По правилу дифференцирования сложной функции, правилу дифференцирования частного и формулам из таблицы производных $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$, $c' = 0$

находим:

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{2x^2}{1+x^4}\right)^2}} \cdot \left(\frac{2x^2}{1+x^4}\right)' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4x^4}{1+2x^4+x^8}}} \cdot \frac{4x(1+x^4) - 2x^2 \cdot 4x^3}{(1+x^4)^2} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{\frac{1+2x^4+x^8-4x^4}{(1+x^4)^2}}} \cdot \frac{4x+4x^5-8x^5}{(1+x^4)^2} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1-2x^4+x^8}{(1+x^4)^2}}} \cdot \frac{4x(1-x^4)}{(1+x^4)^2} = \\
&= \frac{1+x^4}{\sqrt{(1-x^4)^2}} \cdot \frac{4x(1-x^4)}{(1+x^4)^2} = \frac{1}{1-x^4} \cdot \frac{4x(1-x^4)}{1+x^4} = \frac{4x}{1+x^4}.
\end{aligned}$$

Ответ: $y' = \frac{4x}{1+x^4}.$

Задание № 3. Исследуйте функцию и постройте ее график

$$y = \frac{(x+2)^3}{4(x-1)^2}.$$

Решение.

Общая схема исследования функций:

1. Найти область определения функции.
2. Исследовать поведение функции на концах области определения. Найти точки разрыва функции и ее односторонние пределы в этих точках. Найти вертикальные асимптоты.
3. Выяснить, является функция четной, нечетной, периодической.
4. Найти точки пересечения графика функции с осями координат и интервалы знакопостоянства функции.
5. Найти наклонные асимптоты графика функции.
6. Найти точки экстремума и интервалы возрастания и убывания функции.
7. Найти точки перегиба графика функции и интервалы его выпуклости и вогнутости.
8. Построить схематический график функции, используя все полученные результаты.

1. Функция не определена, если $x-1=0$, ($x=1$).

Область определения: $x \in (-\infty; 1) \cup (1; \infty)$.

2. Т.к. $x=1$ – точка разрыва функции, исследуем поведение функции в этой точке слева и справа

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{(x+2)^3}{4(x-1)^2} = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{(x+2)^3}{4(x-1)^2} = +\infty$$

Т.к. пределы равны ∞ , значит $x=1$ – точка разрыва второго рода.

Следовательно, прямая $x=1$ – вертикальная асимптота.

3. Проверим функцию на четность, нечетность. Напомним, что функция $y = f(x)$ называется четной (нечетной) если выполнены два условия:

1. Область определения симметрична относительно начала координат;
2. $f(-x) = f(x)$ ($f(-x) = -f(x)$).

Если $y = f(x)$ четная, то график симметричен относительно оси ординат, а для нечетной – относительно начала координат.

$$f(-x) = \frac{(-x+2)^3}{4(-x-1)^2} = -\frac{(x-2)^3}{4(x+1)^2}.$$

Функция не является ни четной, ни нечетной, т.е. общего вида.

Функция не является периодической.

4. Найдем точки пересечения графика функции с осями координат:

с ОХ: $y = 0$ при $x = -2$;

с ОУ: $x = 0$ при $y = 2$;

Найдем промежутки знакопостоянства функции:

$$y < 0 \Rightarrow \frac{(x+2)^3}{4(x-1)^2} < 0 \Rightarrow x+2 < 0 \Rightarrow x \in (-\infty; -2);$$

$$y > 0 \Rightarrow \frac{(x+2)^3}{4(x-1)^2} > 0 \Rightarrow x+2 > 0 \Rightarrow x \in (-2; 1) \cup (1; +\infty)$$

5. Найдем наклонные асимптоты $y = kx + b$, где

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \quad b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - kx].$$

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+2)^3}{4x(x-1)^2} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \frac{1}{4};$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{(x+2)^3}{4(x-1)^2} - \frac{1}{4}x \right] = [\infty - \infty] = \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+2)^3 - x(x-1)^2}{(x-1)^2} = \\ &= \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 6x^2 + 12x + 8 - x^3 + 2x^2 - x}{(x-1)^2} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = 2 \end{aligned}$$

$$y = \frac{1}{4}x + 2 - \text{наклонная асимптота.}$$

При $x \rightarrow -\infty$ k и b вычисляются аналогично.

6. Найдем точки экстремума функции и промежутки монотонности.

Возрастание и убывание функции $y = f(x)$ характеризуется знаком ее производной y' : если в некотором интервале $y' > 0$, то в этом интервале функция возрастает, а если $y' < 0$, то функция убывает в этом интервале.

Функция $y = f(x)$ может иметь экстремум только в тех точках, которые принадлежат области определения и в которых ее производная равна нулю или не существует. Если y' меняет знак с «+» на «-» при переходе через исследуемую точку, то эта точка максимума, если y' меняет знак с «-» на «+» при переходе через исследуемую точку, то эта точка является точкой

минимума. Если y' не меняет знак при переходе через точку x_0 , в этой точке экстремума нет.

Найдем все точки из области определения функции $y = f(x)$, в которых производная (y') обращается в ноль или не существует.

$$y' = \frac{3(x+2)^2(x-1)^2 - 2(x-1)(x+2)^3}{4(x-1)^4} = \frac{(x+2)^2(x-7)}{4(x-1)^3}.$$

$$y' = 0 \text{ при } x_1 = -2, x_2 = 7;$$

$$y' \text{ не существует при } x = 1$$

Составим таблицу

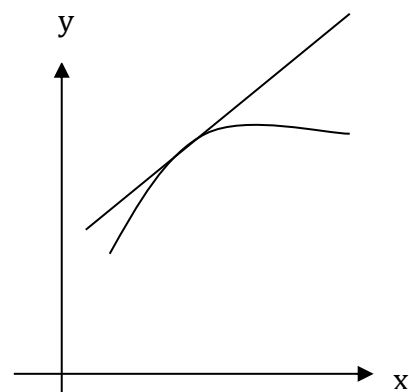
x	$(-\infty; -2)$	-2	$(-2; 1)$	1	$(1; 7)$	7	$(7; +\infty)$
y'	+	0	+	не существует	-	0	+
y		0		не существует		≈ 5	
	возрастает		возрастает		убывает	min	возрастает

Функция возрастает на интервалах $(-\infty; -2)$, $(-2; 1)$, $(7; +\infty)$ и убывает на интервале $(1; 7)$. Точка $x = 7$ есть точка минимума $y_{\min} = y(7) = \frac{729}{144}$.

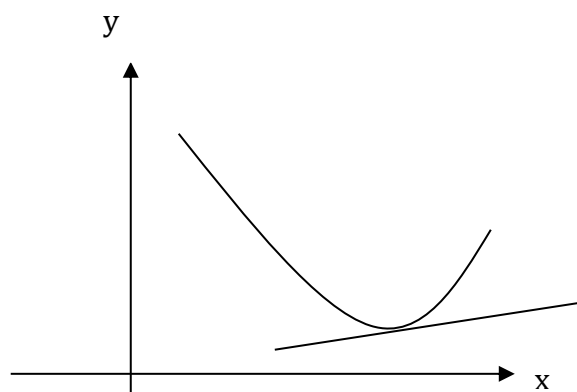
7. Найдем точки перегиба и промежутки выпуклости и вогнутости функции.

График функции $y = f(x)$ называется выпуклым на интервале $(a; b)$, если в каждой точке этого интервала график лежит ниже любой своей касательной.

График функции $y = f(x)$ называется вогнутым на интервале $(a; b)$, если в каждой точке этого интервала график лежит выше любой своей касательной.



0 Выпуклый график



0 Вогнутый график

Точки, в которых функция меняет выпуклость на вогнутость или наоборот, называются точками перегиба.

Перегиб возможен в точках, в которых y'' равна нулю или не существует. Если $y'' < 0$ на интервале $(a; b)$, то график функции является выпуклым ($\cap$) на этом интервале, если же $y'' > 0$, то на интервале $(a; b)$ график вогнутый ($\cup$).

Найдем точки перегиба $y = f(x)$:

$$y'' = \frac{[2(x+2)(x-7) + (x+2)^2](x-1)^3 - 3(x-1)^2(x+2)^2(x-7)}{4(x-1)^6} = \frac{54(x+2)}{4(x-1)^4} = \frac{27(x+2)}{2(x-1)^4}$$

$$y'' = 0 \text{ при } x = -2$$

$$y'' \text{ не существует при } x = 1$$

Составим таблицу

x	$(-\infty; -2)$	-2	$(-2; 1)$	1	$(1; +\infty)$
y''	-	0	+	не существует	+
y	$\cap$	0	$\cup$	не существует	$\cup$

Точка $(-2; 0)$ - точка перегиба.

Дополнительные точки:

$$y(-3) \approx -0,01$$

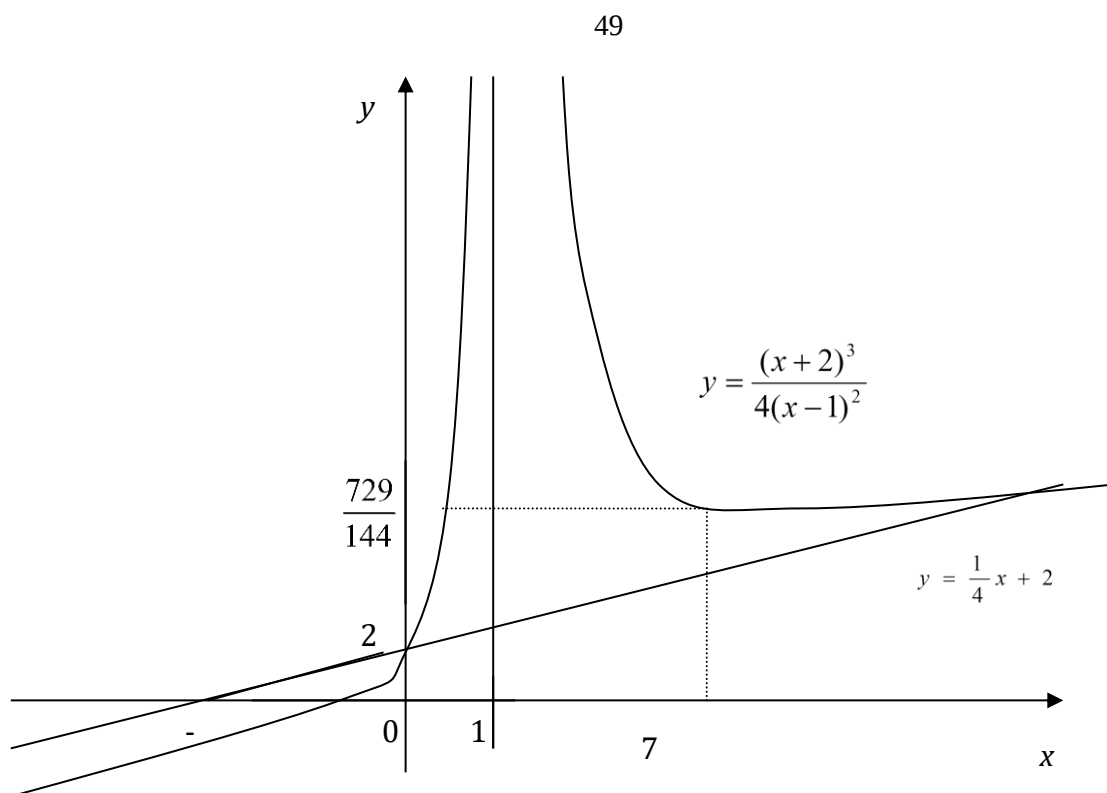
$$y(3) \approx 7,8$$

$$y(-6) \approx -0,3$$

8. Построим график функции, используя результаты исследования.

Замечание:

При построении графика масштабы по оси Ox и Oy могут не совпадать.



Задание №4. Вычислите неопределенные интегралы.

Основными приемами интегрирования функций одной переменной являются непосредственное интегрирование, интегрирование подстановкой, интегрирование по частям.

Прием непосредственного интегрирования основывается на свойствах неопределенного интеграла и таблице интегралов элементарных функций.

Свойства неопределенного интеграла.

1. Производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции; дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению:

$$\left[\int f(x) dx \right]' = f(x), \quad d \int f(x) dx = f(x) dx.$$

2. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен сумме этой функции и произвольной постоянной:

$$\int d\varphi(x) = \varphi(x) + C$$

3. Постоянный множитель можно выносить за знак неопределенного интеграла:

$$\int C f(x) dx = C \int f(x) dx \quad (C = \text{const}).$$

4. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы непрерывных функций равен алгебраической сумме неопределенных интегралов от слагаемых:

$$\int [f_1(x) \pm f_2(x)] dx = \int f_1(x) dx \pm \int f_2(x) dx.$$

Таблица интегралов элементарных функций

$$1. \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$$

$$2. \int 0 \cdot dx = C$$

$$3. \int 1 \cdot dx = \int dx = x + C$$

$$4. \int \frac{1}{x} dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$5. \int e^x dx = e^x + C$$

6. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
7. $\int \cos x dx = \sin x + C$
8. $\int \sin x dx = -\cos x + C$
9. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
10. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$
11. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C$
12. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$
13. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C_1$
14. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$
15. $\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C$
16. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C$
17. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a-x}{a+x} \right| + C$
18. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C$

a) $\int (6x^5 - 4x^2 + 8x - 1) dx$

Решение.

Воспользуемся приемом непосредственного интегрирования.

$$\int (6x^5 - 15x^2 + 8x - 1) dx = 6 \int x^5 dx - 15 \int x^2 dx + 8 \int x dx - \int dx = 6 \cdot \frac{x^6}{6} - 15 \cdot \frac{x^3}{3} + 8 \cdot \frac{x^2}{2} - x =$$

$$= x^6 - 5x^3 + 4x^2 - x + C.$$

Ответ: $x^6 - 5x^3 + 4x^2 - x + C$.

б) $\int \sqrt[5]{x^2} (3 - 2\sqrt[5]{x^3}) dx$.

Решение.

Воспользуемся приемом непосредственного интегрирования.

$$\int \sqrt[5]{x^2} (3 - 2\sqrt[5]{x^3}) dx = \int (3\sqrt[5]{x^2} - 2x) dx = 3 \int x^{\frac{2}{5}} dx - 2 \int x dx = \frac{3x^{\frac{2}{5}+1}}{\frac{2}{5}+1} - 2 \cdot \frac{x^2}{2} + C = \frac{3x^{\frac{7}{5}}}{\frac{7}{5}} - x^2 + C =$$

$$= \frac{15}{7} \sqrt[5]{x^7} - x^2 + C.$$

Ответ: $\frac{15}{7} \sqrt[5]{x^7} - x^2 + C.$

Интегрирование способом подстановки (замены переменной).

Пусть требуется вычислить интеграл $\int f(x)dx$, где $f(x)$ – непрерывная функция. Введем вместо x новую переменную t , положив $x = \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ – функция, имеющая непрерывную производную $\varphi'(t)$, причем такая, для которой существует обратная функция $t = \psi(x)$.

Тогда для вычисления $\int f(x)dx$ достаточно вычислить

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt ; t = \psi(x) \quad (1)$$

Функцию $\varphi(t)$ выбирают так, чтобы новая подынтегральная функция была «более простой» для интегрирования.

В частности, рассмотрим неопределенный интеграл $\int f(kx+b)dx$.

$$\int f(kx+b)dx = \left\{ \begin{array}{l} t = kx+b \\ dt = kdx \\ dx = \frac{1}{k} dt \end{array} \right\} = \int f(t) \cdot \frac{1}{k} dt = \frac{1}{k} \int f(t)dt = \frac{1}{k} F(t) + C = \frac{1}{k} F(kx+b) + C.$$

Итак,

$$\int f(kx+b)dx = \frac{1}{k} F(kx+b) + C. \quad (2)$$

в) $\int (2x+3)^6 dx.$

Решение.

Применим формулу (2).

$$\int (2x+3)^6 dx = \{k=2\} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(2x+3)^{6+1}}{6+1} + C = \frac{1}{14} (2x+3)^7 + C.$$

Ответ: $\frac{1}{14} (2x+3)^7 + C.$

г) $\int \sqrt{4-x} dx.$

Решение.

Применим формулу (2).

$$\int \sqrt{4-x} dx = \int (4-x)^{\frac{1}{2}} dx = \{k = -1\} = \frac{1}{-1} \cdot \frac{(4-x)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = -\frac{(4-x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = -\frac{2}{3} \sqrt{(4-x)^3} + C.$$

Ответ: $-\frac{2}{3} \sqrt{(4-x)^3} + C.$

д) $\int \frac{xdx}{x^2+2}.$

Решение.

Применим интегрирование подстановкой.

$$\int \frac{xdx}{x^2+2} = \left\{ \begin{array}{l} t = x^2 + 2 \\ dt = 2xdx \\ xdx = \frac{dt}{2} \end{array} \right\} = \int \frac{dt}{2t} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} \ln|t| + C = \frac{1}{2} \ln|x^2 + 2| + C.$$

Ответ: $\frac{1}{2} \ln|x^2 + 2| + C.$

е) $\int \frac{6x-5}{\sqrt{3x^2-5x+4}} dx.$

Решение.

Применим интегрирование подстановкой.

$$\int \frac{6x-5}{\sqrt{3x^2-5x+4}} dx = \left\{ \begin{array}{l} t = 3x^2 - 5x + 4 \\ dt = (6x-5)dx \end{array} \right\} = \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t} + C = 2\sqrt{3x^2-5x+4} + C.$$

Ответ: $2\sqrt{3x^2-5x+4} + C.$

Интегрирование по частям.

Если u и v — функции, дифференцируемые по переменной x , то из формулы для дифференциала произведения двух функций $d(uv) = u dv + v du$ получается формула интегрирования по частям

$$\int u dv = uv - \int v du \quad (3)$$

Укажем некоторые часто встречающиеся интегралы, которые вычисляются методом интегрирования по частям.

1. Интегралы вида

$\int P(x)e^{kx}dx$, $\int P(x)\sin kxdx$; $\int P(x)\cos kxdx$, где $P(x)$ – многочлен, k – некоторое число.

За u принимают $P(x)$, т.е. $u = P(x)$, за dv – все остальное.

2. Интегралы вида

$\int P(x) \cdot \ln x dx$; $\int P(x) \arcsin x dx$; $\int P(x) \arccos x dx$; $\int P(x) \arctg x dx$; $\int P(x) \operatorname{arcctg} x dx$, где $P(x)$ – многочлен.

Во всех этих случаях за u принимают функцию, являющуюся множителем при $P(x)$, за dv – все остальное.

3. Интегралы вида

$\int e^{ax} \cdot \cos bx \cdot dx$, $\int e^{ax} \cdot \sin bx \cdot dx$, где a и b – числа, находятся двукратным интегрированием по частям.

ж) $\int x \sin x dx$.

Решение.

Применим интегрирование по частям.

Интеграл относится к первому виду, поэтому

обозначим: $u = x$; $dv = \sin x dx$.

Для применения формулы (3) необходимо знать еще v и du . Интегрируем равенство $\int dv = \int \sin x dx$, $v = -\cos x$

Подставляя значения u, v, du, dv в формулу (3) находим:

$$\int x \sin x dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x \\ dv = \sin x dx \end{array} \quad \begin{array}{l} du = dx \\ v = -\cos x \end{array} \right\} = x(-\cos x) - \int (-\cos x) dx = -x \cos x + \int \cos x dx =$$

$$= -x \cos x + \sin x + C.$$

Ответ: $-x \cos x + \sin x + C$.

з) $\int \sqrt{x} \ln 2x dx$.

Решение.

Применим интегрирование по частям.

Интеграл относится ко второму виду, поэтому полагая

$u = \ln 2x$, $dv = \sqrt{x} dx$, получаем $\int u dv = uv - \int v du$.

По формуле (3) находим

$$\int x \ln x dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \ln x \quad du = \frac{dx}{x} \\ dv = \sqrt{x} dx \quad v = \int \sqrt{x} dx = \frac{2\sqrt{x^3}}{3} \end{array} \right\} = \frac{2\sqrt{x^3}}{3} \ln x - \int \frac{2\sqrt{x^3}}{3} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{2\sqrt{x^3}}{3} \ln x -$$

$$-\frac{2}{3} \int \sqrt{x} dx = \frac{2\sqrt{x^3}}{3} \ln x - \frac{2}{3} \cdot \frac{2\sqrt{x^3}}{3} + C = \frac{2\sqrt{x^3}}{3} \ln x - \frac{4\sqrt{x^3}}{9} + C.$$

Ответ: $\frac{2\sqrt{x^3}}{3} \ln x - \frac{4\sqrt{x^3}}{9} + C.$

и) $\int x^2 \arccos 3x dx.$

Решение.

Применим интегрирование по частям.

Интеграл относится ко второму виду, поэтому полагая

$u = \arccos 3x, \quad dv = x^2 dx$, по формуле (3) находим:

$$\int x^2 \arccos 3x dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \arccos 3x \quad du = -\frac{3dx}{\sqrt{1-9x^2}} \\ dv = x^2 dx \quad v = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} \end{array} \right\} = \frac{x^3}{3} \arccos 3x - \int \frac{x^3}{3} \cdot \left(-\frac{3dx}{\sqrt{1-9x^2}} \right) =$$

$$= \frac{x^3}{3} \arccos 3x + \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-9x^2}}.$$

Отдельно вычислим $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-9x^2}} = \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{1}{3} \sin t \\ dx = \frac{1}{3} \cos t dt \end{array} \right\} = \int \frac{\frac{1}{27} \sin^3 t \cdot \frac{1}{3} \cos t}{\sqrt{1-9\left(\frac{1}{3} \sin t\right)^2}} dt =$

$$= \frac{1}{81} \int \frac{\sin^3 t \cdot \cos t}{\sqrt{1-\sin^2 t}} dt = \frac{1}{81} \int \frac{\sin^3 t \cdot \cos t}{\sqrt{1-\sin^2 t}} dt = \frac{1}{81} \int \frac{\sin^3 t \cdot \cos t}{\cos t} dt = \frac{1}{81} \int \sin^3 t dt = \frac{1}{81} \int \sin^2 t \cdot \sin t dt =$$

$$= \frac{1}{81} \int (1 - \cos^2 t) \cdot \sin t dt = \left\{ \begin{array}{l} z = \cos t \\ dz = -\sin t dt \end{array} \right\} = -\frac{1}{81} \int (1 - z^2) dz = -\frac{1}{81} \left(z - \frac{z^3}{3} \right) + C =$$

$$= -\frac{1}{81} \left(\cos t - \frac{\cos^3 t}{3} \right) + C.$$

Из того, что $x = \frac{1}{3} \sin t$, выразим t через x : $3x = \sin t$, $t = \arcsin 3x$, тогда

$$\cos t = \cos(\arcsin 3x) = \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin 3x)} = \sqrt{1 - (3x)^2} = \sqrt{1 - 9x^2}.$$

Получаем: $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-9x^2}} = -\frac{1}{81} \left(\sqrt{1-9x^2} - \frac{\sqrt{(1-9x^2)^3}}{3} \right) + C.$

Окончательно,

$$\int x^2 \arccos 3x dx = \frac{x^3}{3} \arccos 3x + \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-9x^2}} = \frac{x^3}{3} \arccos 3x - \frac{1}{81} \left(\sqrt{1-9x^2} - \frac{\sqrt{(1-9x^2)^3}}{3} \right) + C.$$

$$\text{Ответ: } \frac{x^3}{3} \arccos 3x - \frac{1}{81} \left(\sqrt{1-9x^2} - \frac{\sqrt{(1-9x^2)^3}}{3} \right) + C.$$

Задание №5. Вычислите определенные интегралы.

Для вычисления определенных интегралов используются методы вычисления неопределенного интеграла и формула Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

где $F(x)$ - первообразная для функции $f(x)$.

а) $\int_0^1 (3x-1)dx$.

Решение.

$$\int_0^1 (3x-1)dx = \int_0^1 3x dx - \int_0^1 dx = 3 \int_0^1 x dx - \int_0^1 dx = 3 \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 - x \Big|_0^1 = \frac{3}{2}(1^2 - 0^2) - (1 - 0) = 1\frac{1}{2} - 1 = \frac{1}{2}.$$

б) $\int_1^2 \sqrt{5x-1} dx$.

Решение.

Используем метод подстановки:

$$\int_1^2 \sqrt{5x-1} dx = \left\{ \begin{array}{l} 5x-1=t \quad x=1 \Rightarrow t=4 \\ (5x-1)'=t' \quad x=2 \Rightarrow t=9 \\ 5 dx=dt \\ dx=\frac{1}{5} dt \end{array} \right\} = \int_4^9 \sqrt{t} \cdot \frac{1}{5} dt = \frac{1}{5} \int_4^9 t^{\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{5} \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Big|_4^9 =$$

$$= \frac{2}{15} \left(9^{\frac{3}{2}} - 4^{\frac{3}{2}} \right) = \frac{2}{15} (27 - 8) = 2\frac{8}{15}.$$

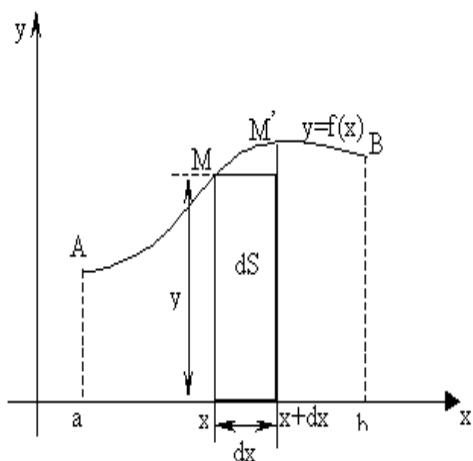
в) $\int_1^2 (3x^2 + 2x - 5) \cdot \ln(x) dx$.

Решение.

Используем метод интегрирования по частям.

$$\begin{aligned} \int_1^2 (3x^2 + 2x - 5) \cdot \ln(x) dx &= \left\{ \begin{array}{l} u = \ln x \quad du = \frac{dx}{x} \\ dv = (3x^2 + 2x - 5)dx \quad v = x^3 + x^2 - 5x \end{array} \right\} = \\ &= (x^3 + x^2 - 5x) \ln x \Big|_1^2 - \int_1^2 (x^3 + x^2 - 5x) \cdot \frac{dx}{x} = 2 \ln 2 - 0 - \int_1^2 (x^2 + x - 5) dx = \\ &= 2 \ln 2 - \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 5x \right) \Big|_1^2 = 2 \ln 2 - \left(\frac{8}{3} + 2 - 10 - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 5 \right) \right) = 2 \ln 2 + \frac{7}{6} = \frac{12 \ln 2 + 7}{6}. \end{aligned}$$

Задание №6. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями.



Наиболее простая геометрическая задача: найти площадь фигуры, границы которой определены уравнениями соответствующих линий и осью Ox . В этом случае рассматривается криволинейная трапеция и используется геометрический смысл определенного интеграла как предел суммы площадей маленьких прямоугольников, образующих ступенчатую фигуру. Элементом площади в прямоугольной декартовой системе координат, полученным в процессе построения интегральной суммы, в этом случае служит прямоугольник, площадь которого $\Delta S_i = f(\xi_i) \Delta x_i$. Тогда площадь

криволинейной трапеции находится по формуле

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \Delta S_i = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx, \quad (3.1)$$

где S – площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y=f(x)$, отрезком $[a;b]$ на оси Ox и прямыми $x=a$ и $x=b$ ($a < b$).

Определим криволинейные трапеции с основаниями на оси Ox и оси Oy и соответствующие формулы для вычисления их площадей.

Фигура, ограниченная графиком непрерывной функции $y = f(x)$, $f(x) \geq 0$, прямыми $x = a$, $x = b$ ($a < b$) и осью Ox , называется криволинейной трапецией (с основанием на оси Ox).

Площадь криволинейной трапеции (рис.1) с основанием на оси Ox вычисляется по формуле

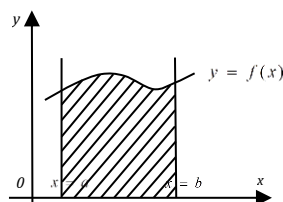


Рис. 1.

$$S = \int_a^b f(x) dx$$

Если $f(x) \leq 0$, т.е. криволинейная трапеция расположена ниже оси Ox (рис.2), то её площадь вычисляется по формуле

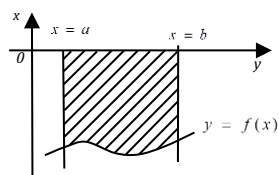


Рис. 2.

$$S = - \int_a^b f(x) dx$$

Если для всех $x \in [a;b]$ выполняется условие

$f_2(x) \geq f_1(x)$, т.е. $f_2(x) - f_1(x) \geq 0$, то площадь фигуры, ограниченной графиками непрерывных функций $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ и прямыми $x = a$, $x = b$, $a < b$ (рис.3), вычисляется по формуле

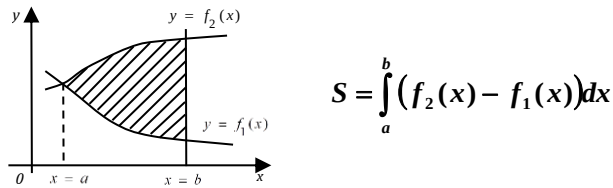


Рис. 3.

Заметим, что одна из прямых (или обе) могут «стягиваться» в точку.

Фигура, ограниченная графиком непрерывной функции $x = \varphi(y)$, $\varphi(y) \geq 0$, прямыми $y = c$, $y = d$, ($c < d$), и осью Oy , называется криволинейной трапецией (с основанием на оси Oy).

Площадь криволинейной трапеции с основанием на оси Oy (рис.4) вычисляется по формуле:

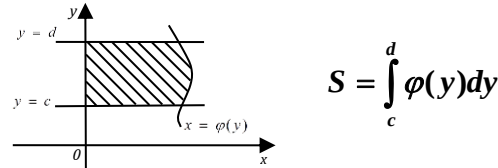


Рис. 4.

Если $\varphi(y) \leq 0$, т.е. криволинейная трапеция расположена левее оси Oy (рис.5), то её площадь вычисляют по формуле

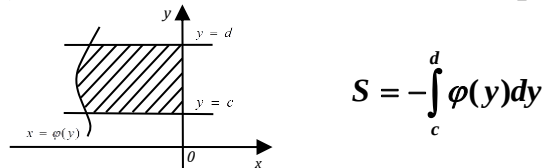


Рис. 5.

Если для всех $y \in [c; d]$ выполняется условие $\varphi_2(y) \geq \varphi_1(y)$, т.е. $\varphi_2(y) - \varphi_1(y) \geq 0$, то площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиками непрерывных функций $x = \varphi_2(y)$, $x = \varphi_1(y)$ и прямыми $y = c$, $y = d$, $c < d$ (рис.6), вычисляется по формуле

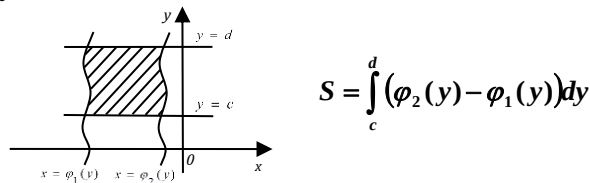


Рис. 6.

Заметим, что одна из прямых (или обе) могут «стягиваться» в точку.

Если плоская фигура не является криволинейной трапецией указанных видов, то её разбивают на криволинейные трапеции прямыми, параллельными оси Oy или Ox и применяют соответствующие формулы.

а) Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 + 1$, $x = 2$, $y = 0$, $x = 0$.

Решение.

Построим линии, ограничивающие фигуру.

$y = x^2 + 1$ – парабола, симметричная относительно оси Oy , вершина $(0;1)$.

$x = 2$ – прямая, проходящая через точку $(2;0)$, параллельная оси Oy .

$y = 0$ – аналитическое выражение оси Ox .

$x = 0$ – аналитическое выражение оси Oy .

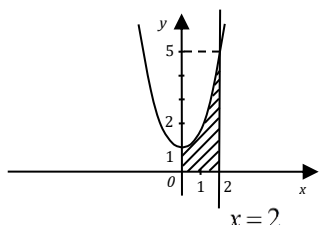


Рис. 7.

Построенная фигура (рис.7) является криволинейной трапецией с основанием на оси Ox , поэтому её площадь вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b f(x) dx$$

$$f(x) = x^2 + 1, \quad a = 0, \quad b = 2.$$

Тогда

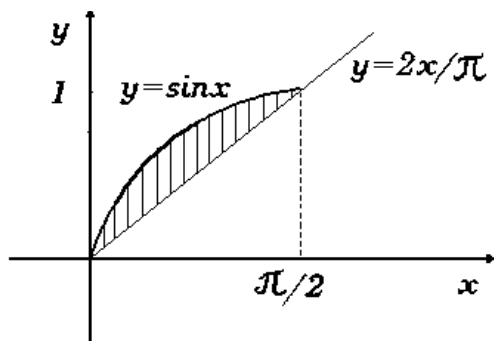
$$S = \int_0^2 (x^2 + 1) dx = \left. \frac{x^3}{3} + x \right|_0^2 = \frac{8}{3} + 2 = 2\frac{2}{3} + 2 = 4\frac{2}{3} \text{ (кв. ед.)}.$$

Ответ: $4\frac{2}{3}$ кв.ед.

б) Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = \frac{2}{\pi}x \text{ и } y = \sin x \quad (0 \leq x \leq \pi/2).$$

Решение.



По формуле $S = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$ находим:

$$S = \int_0^{\pi/2} \left(\sin x - \frac{2}{\pi}x \right) dx = \left[-\cos x - \frac{x^2}{\pi} \right]_0^{\pi/2} = 1 - \frac{\pi}{4} = \frac{4 - \pi}{4} \text{ (кв.ед.)}.$$

Ответ: $\frac{4 - \pi}{4}$ кв. ед.

в) Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $x + 2y - 8 = 0$, $y = 1$, $y = 3$, $x = 0$.

Построим линии ограничивающие фигуру.

$x + 2y - 8 = 0$ – прямая; если $x = 0$, то $2y - 8 = 0 \Rightarrow y = 4$,

если $y = 0$, то $x - 8 = 0 \Rightarrow x = 8$.

Прямая проходит через точки $(0; 4)$, $(8; 0)$.

$y = 1$ – прямая, параллельная оси Ox .

$y = 3$ – прямая, параллельная оси Ox .

$x = 0$ – ось Oy .

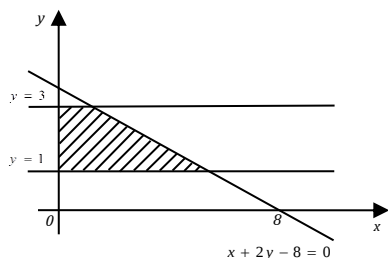


Рис. 8.

Фигура (рис.8) является криволинейной трапецией с основанием на оси Oy , поэтому $S = \int_c^d \varphi(y) dy$.

$$x + 2y - 8 = 0 \Rightarrow x = 8 - 2y \Rightarrow \varphi(y) = 8 - 2y, c = 1, d = 3$$

Тогда

$$S = \int_1^3 (8 - 2y) dy = 8y \Big|_1^3 - 2 \frac{y^2}{2} \Big|_1^3 = 8(3 - 1) - (3^2 - 1^2) = 16 - 8 = 8 \text{ (кв.ед.)}$$

Ответ: 8 кв. ед.

г) Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 - 4x$, $y = 0$.

Построим линии ограничивающие фигуру.

$y = x^2 - 4x$ – парабола, симметричная относительно оси Oy . Т.к.

$y = x^2 - 2 \cdot 2x + 4 - 4 = (x - 2)^2 - 4$, то вершина $(2; 4)$.

Координаты вершины также можно определить по формуле

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2 \cdot 1} = 2,$$

$$y_0 = 2^2 - 4 \cdot 2 = -4.$$

$y = 0$ – ось Ox .

Найдем координаты точек пересечения графиков (рис. 9) функций.

$$\begin{cases} y = x^2 - 4x, \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 4x = 0$$

$$x(x - 4) = 0$$

$$x = 0, x = 4$$

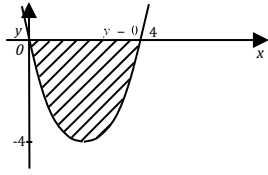


Рис. 9.

Т.о. $0 \leq x \leq 4$, на этом отрезке функция $x^2 - 4x < 0$, поэтому $S = -\int_a^b f(x)dx$.

$$f(x) = x^2 - 4x, \quad a = 0, \quad b = 4.$$

$$\text{Тогда } S = -\int_0^4 (x^2 - 4x)dx = -\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^4 + 4\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^4 = -\frac{64}{3} + 32 = 10\frac{2}{3} \text{ (кв. ед.)}.$$

Ответ: $10\frac{2}{3}$ кв. ед.

д) Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = x^2, \quad y = x + 2$$

Построим линии, ограничивающие фигуру.

$y = x^2$ — парабола, симметричная относительно оси Oy , вершина $(0;0)$.

$y = x + 2$ — прямая, если $x = 0$, то $y = 2$,

если $y = 0$, то $x = -2$.

Найдём точки пересечения линий:

$$\begin{cases} y = x^2, \\ y = x + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = x + 2 \\ x^2 - x - 2 = 0 \\ x = -1, x = 2 \end{cases}$$

Т.о. $-1 \leq x \leq 2, a = -1, b = 2$

$f_1(x) = x^2, f_2(x) = x + 2, f_2(x) > f_1(x)$ (рис.10).

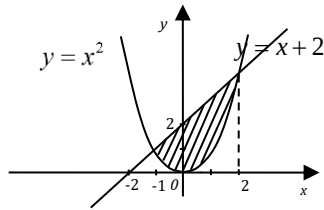


Рис. 10.

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx = \int_{-1}^2 (x + 2 - x^2)dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_{-1}^2 + 2\left.\frac{x^2}{2}\right|_{-1}^2 - \left.\frac{x^3}{3}\right|_{-1}^2 = \frac{1}{2}(4-1) + 2(2+1) - \frac{1}{3}(8+1) = \frac{3}{2} + 6 - 3 = 4,5 \text{ (ед}^2\text{)}.$$

Ответ: 4,5 кв.ед.

е) Найти площадь области ограниченной эллипсом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Решение: Фигура (рис.11) симметрична относительно осей координат, поэтому достаточно найти $\frac{1}{4}S$, интегрируя по промежутку $[0,a]$ функцию, график которой лежит в первой четверти и определяет верхнюю границу области.

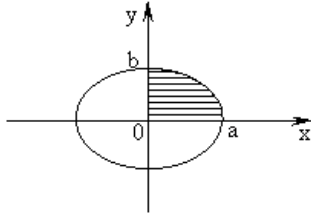


Рис.11

Запишем уравнение верхней границы области - эллипса для первого квадранта: $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, $x \in [0,a]$, а интеграл вычисляем с помощью замены переменной:

$$\frac{1}{4}S = \int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} dx = \left. \begin{array}{l} x = a \sin t \\ dx = a \cos t dt \\ x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ x = a \Rightarrow t = \frac{\pi}{2} \end{array} \right| = \frac{b}{a} \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} \cdot a \cos t dt = ab \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = \frac{\pi}{4} ab \text{ Ответ:}$$

площадь эллипса $S = \pi ab$ (кв.ед.)

Задание №7. Решите систему линейных уравнений

а) методом Крамера; б) методом Гаусса; в) матричным методом.
Выполните проверку.

$$\begin{cases} 2x - 3y - 5z = 1 \\ 3x + y - 2z = -4. \\ x - 2y + z = 5 \end{cases}$$

Решение.

а) методом Крамера.

Теорема Крамера. Если определитель основной матрицы системы $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение $x = \frac{\Delta_x}{\Delta}$, $y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$, $z = \frac{\Delta_z}{\Delta}$.

$$\begin{cases} 2x - 3y - 5z = 1 \\ 3x + y - 2z = -4. \\ x - 2y + z = 5 \end{cases}$$

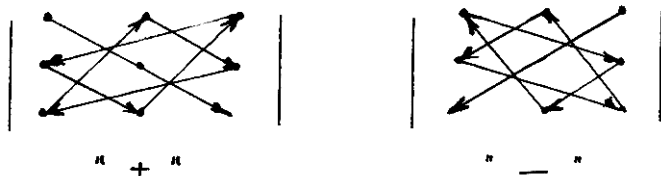
Основная матрица системы – это матрица из коэффициентов при неизвестных:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Определитель матрицы третьего порядка вычислим по правилу треугольника:

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

или схематично:



$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -5 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 6 + 30 + 5 + 9 - 8 = 44 \neq 0,$$

следовательно, система имеет единственное решение.

Определители Δ_x , Δ_y , Δ_z получаются из определителя Δ заменой соответствующего столбца столбцом свободных членов. Вычислим их аналогично Δ :

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -5 \\ -4 & 1 & -2 \\ 5 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 30 - 40 + 25 - 12 - 4 = 0,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 \\ 3 & -4 & -2 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = -8 - 75 - 2 - 20 - 3 + 20 = -88,$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 1 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 10 + 12 - 6 - 1 + 45 - 16 = 44.$$

Вычислим значения переменных по формулам Крамера:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{0}{44} = 0 \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-88}{44} = -2 \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{44}{44} = 1.$$

Ответ: $x = 0; y = -2; z = 1$ или $(0; -2; 1)$.

Следствие из теоремы Крамера:

Если $\Delta = 0$ и хотя бы один из $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z \neq 0$, то система не имеет решений.

Если $\Delta = 0$ и $\Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$, то система имеет множество решений.

б) методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x - 3y - 5z = 1 \\ 3x + y - 2z = -4 \\ x - 2y + z = 5 \end{cases}$$

Запишем расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & -5 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & -4 \\ 1 & -2 & 1 & 5 \end{array} \right).$$

Будем последовательно исключать неизвестные. Исключим x из всех уравнений, кроме первого. Для этого переставим первую и третью строки матрицы местами:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & -2 & -4 \\ 2 & -3 & -5 & 1 \end{array} \right).$$

Перестановка строк выполняется с целью сделать ведущим элементом первой строки 1.

Умножим все элементы первой строки на -3 (число, противоположное коэффициенту при x во втором уравнении) и прибавим их к соответствующим элементам второй строки:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 7 & -5 & -19 \\ 2 & -3 & -5 & 1 \end{array} \right) \quad \left[\begin{array}{l} 1 * (-3) + 3 = 0 \\ -2 * (-3) + 1 = 7 \\ 1 * (-3) + (-2) = -5 \\ 5 * (-3) + (-4) = -19 \end{array} \right].$$

Умножим все элементы первой строки на -2 (число, противоположное коэффициенту при x в третьем уравнении) и прибавим их к соответствующим элементам третьей строки:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 7 & -5 & -19 \\ 0 & 1 & -7 & -9 \end{array} \right) \quad \left[\begin{array}{l} 1 * (-2) + 2 = 0 \\ -2 * (-2) + (-3) = 1 \\ 1 * (-2) + (-5) = -7 \\ 5 * (-2) + 1 = -9 \end{array} \right].$$

Исключим y из третьего уравнения. Для этого переставим первую и третью строки матрицы местами:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -7 & -9 \\ 0 & 7 & -5 & -19 \end{array} \right).$$

Умножим все элементы второй строки на -7 (число, противоположное коэффициенту при y в третьем уравнении) и прибавим их к соответствующим элементам третьей строки:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -7 & -9 \\ 0 & 0 & 44 & 44 \end{array} \right) \quad \left[\begin{array}{l} 1 * (-7) + 7 = 0 \\ -7 * (-7) + (-5) = 44 \\ -9 * (-7) + (-19) = 44 \end{array} \right].$$

Разделим все элементы третьей строки на 44:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -7 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right).$$

Получили ступенчатую матрицу. В ней все элементы главной диагонали равны 1, а все элементы ниже главной диагонали равны нулю. Запишем обратно систему уравнений:

$$\begin{cases} x - 2y + z = 5, \\ y - 7z = -9, \\ z = 1. \end{cases}$$

Подставим значение $z = 1$ в первое и второе уравнения:

$$\begin{cases} x - 2y + 1 = 5, \\ y - 7 = -9, \\ z = 1. \end{cases}$$

Из второго уравнения найдем значение y :

$$\begin{cases} x - 2y = 4, \\ y = -2, \\ z = 1. \end{cases}$$

Подставим значение $y = -2$ в первое уравнение:

$$\begin{cases} x - 2 * (-2) = 4, \\ y = -2, \\ z = 1. \end{cases}$$

Из первого уравнения находим x :

$$\begin{cases} x = 0, \\ y = -2, \\ z = 1. \end{cases}$$

Ответ: $x = 0; y = -2; z = 1$ или $(0; -2; 1)$.

в) матричным методом (методом обратной матрицы).

$$\begin{cases} 2x - 3y - 5z = 1 \\ 3x + y - 2z = -4 \\ x - 2y + z = 5 \end{cases}$$

Запишем матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} - \text{основная матрица системы}$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \text{столбец неизвестных}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} - \text{матрица/столбец свободных членов}$$

Теорема. Если $|A| \neq 0$, то система имеет единственное решение $X = A^{-1} \cdot B$, где A^{-1} – матрица, обратная к матрице A .

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -5 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 6 + 30 + 5 + 9 - 8 = 44 \neq 0, \text{ значит, существует обратная}$$

матрица A^{-1} и система имеет единственное решение.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot A^* - \text{формула обратной матрицы}$$

1. Вычисляем $|A| = 44 \neq 0$.

2. Вычисляем алгебраические дополнения элементов матрицы A : $A_{ij} = (-1)^{i+j} \Delta_{ij}$, где Δ_{ij} – минор элемента a_{ij} матрицы A (определитель матрицы,

которая получается из матрицы A после вычеркивания элемента a_{ij} из строки и из столбца:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} \overline{2} & \overline{-3} & \overline{-5} \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 4 = -3 \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(3 + 2) = -5$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -6 - 1 = -7$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -3 & -5 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -(-3 - 10) = 13 \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 5 = 7$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -(-4 + 3) = 1$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -3 & -5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 6 + 5 = 11 \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -(-4 + 15) = -11$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 9 = 11$$

3. Составим матрицу из найденных дополнений и транспонируем ее

$$A' = \begin{pmatrix} -3 & -5 & -7 \\ 13 & 7 & 1 \\ 11 & -11 & 11 \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} -3 & -5 & -7 \\ 13 & 7 & 1 \\ 11 & -11 & 11 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -3 & 13 & 11 \\ -5 & 7 & -11 \\ -7 & 1 & 11 \end{pmatrix}.$$

A^* – матрица, присоединенная к A .

4. Записываем обратную матрицу по формуле $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot A^*$.

$$A^{-1} = \frac{1}{44} \begin{pmatrix} -3 & 13 & 11 \\ -5 & 7 & -11 \\ -7 & 1 & 11 \end{pmatrix}.$$

5. Вычисляем матрицу X по формуле $X = A^{-1} \cdot B$:

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{44} \begin{pmatrix} -3 & 13 & 11 \\ -5 & 7 & -11 \\ -7 & 1 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{44} \begin{pmatrix} -3 \cdot 1 + 13 \cdot (-4) + 11 \cdot 5 \\ -5 \cdot 1 + 7 \cdot (-4) + (-11) \cdot 5 \\ -7 \cdot 1 + 1 \cdot (-4) + 11 \cdot 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{44} \begin{pmatrix} 0 \\ -88 \\ 44 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Ответ: $x = 0; y = -2; z = 1$ или $(0; -2; 1)$.

Таким образом, независимо от метода решения, найдены следующие значения неизвестных: $x = 0; y = -2; z = 1$.

Выполним проверку, подставив найденные значения неизвестных x, y, z в уравнения заданной системы:

$$\begin{cases} 2 * 0 - 3 * (-2) - 5 * 1 = 1, \\ 3 * 0 + (-2) - 2 * 1 = -4, \\ 0 - 2 * (-2) + 1 = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} 1 = 1, \\ -4 = -4, \\ 5 = 5 \end{cases}.$$

Проверка выполнена, результат верный.

Задание №8. Решите задачу.

Найти вероятность выпадения четного числа очков при бросании кубика.

Решение.

Рассмотрим случайное событие $A = \{\text{выпадет четное число}\}$. Общее количество исходов, которые могут появиться при бросании кубика $n = 6$. Количество благоприятных исходов (выпадение четного числа) $m = 3$.

Вероятность: $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Задание №9. Дискретная случайная величина задана рядом распределения. Необходимо:

- записать пропущенную вероятность.
- подсчитать вероятности попаданий в указанные интервалы.
- вычислить числовые характеристики случайной величины M_x , D_x , σ_x .

x_i	1	4	7	9	12	14
p_i	0,1	0,15	0,15	0,4	0,05	0,15

$P(X=1); \quad P(X=8); \quad P(X<5); \quad P(X>8); \quad P(4<X<13); \quad P(10<X<20).$

Решение.

- а) Так как $\sum_i p_i = 1$, то пропущенная вероятность равна

$$1 - (0,1 + 0,15 + 0,4 + 0,05 + 0,15) = 0,15.$$

б) $P(X=1) = 0,1;$

$P(X=8) = 0;$

$P(X<5) = P(X=1) + P(X=4) = 0,25;$

$P(X>8) = P(X=9) + P(X=12) + P(X=14) = 0,4 + 0,05 + 0,15 = 0,6;$

$P(4<X<13) = P(X=7) + P(X=9) + P(X=12) = 0,15 + 0,4 + 0,05 = 0,6;$

$P(10<X<20) = P(X=12) + P(X=14) = 0,05 + 0,15 = 0,2.$

в) $M_x = \sum_i x_i p_i = 1 \cdot 0,1 + 4 \cdot 0,15 + 7 \cdot 0,15 + 9 \cdot 0,4 + 12 \cdot 0,05 + 14 \cdot 0,15 = 8,05;$

$$D_x = \sum_i x_i^2 p_i - M_x^2 = 1^2 \cdot 0,1 + 4^2 \cdot 0,15 + 7^2 \cdot 0,15 + 9^2 \cdot 0,4 + 12^2 \cdot 0,05 + 14^2 \cdot 0,15 - 8,05^2 = 14,0475.$$

$$\sigma_x = \sqrt{D_x} \approx 3,75.$$

Задание №10. Решите задачу.

а) Сколько денежных средств будет на вкладе через год, если положить n тыс. руб. под $m\%$? Какова будет сумма на вкладе через два года?

б) Определите сумму подоходного налога, если заработная плата составляет k руб.

в) Определите размер заработной платы, если сумма подоходного налога составляет t руб.

n	m	k	t
8	15,1	32 448	3 898

Решение.

а) Вычислим, сколько денежных средств будет на вкладе через год:
 $8\,000 \cdot 1,151 = 9\,208$ (руб.).

Вычислим, сколько денежных средств будет на вкладе через два года:
 $9\,208 \cdot 1,151 = 10\,598,41 \approx 10\,598$ (руб.).

б) Определим сумму подоходного налога, исходя из ставки НДФЛ 13%:
 $32\,448 \cdot 0,13 = 4\,218,24 \approx 4\,218$ (руб.).

в) Определим размер заработной платы, исходя из ставки НДФЛ 13%:
 $3\,898 : 0,13 = 29\,984,62 \approx 29\,985$ (руб.).

Литература

Основные источники:

1. Богомолов, Н. В. Математика: учебник для среднего профессионального образования / Н. В. Богомолов, П. И. Самойленко. — 5-е изд., перераб. и доп. — Москва: Издательство Юрайт, 2021. — 401 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-07878-7. — Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]
2. Богомолов, Н. В. Практические занятия по математике в 2 ч. Часть 1: учебное пособие для среднего профессионального образования / Н. В. Богомолов. — 11-е изд., перераб. и доп. — Москва: Издательство Юрайт, 2021. — 326 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-08799-4. — Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт].
3. Григорьев, С.В. Математика: учебник для использования в учебном процессе образовательных учреждений, реализующих образовательные программы среднего профессионального образования/ С. В. Григорьев, С. В. Иволгина. - 13-е изд., стер. - Москва: Издательский центр «Академия», 2020 – 416 с. – ISBN-978-5-4468-9248-8. - Текст: непосредственный.
4. Попов, А. М. Математика для экономистов. В 2 ч. Часть 2 : учебник и практикум для среднего профессионального образования / А. М. Попов, В. Н. Сотников. — 2-е изд., перераб. и доп. — Москва: Издательство Юрайт, 2020. — 295 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-09458-9. — Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт].

Дополнительные источники:

1. Башмаков, М.А. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия/ М.И. Башмаков. - М.: Издательский центр «Академия», 2017. – 256с. – ISBN-978-5-4468-9248-8. - Текст: непосредственный. 230
2. Богомолов, Н. В. Математика: учебник для прикладного бакалавриата / Н. В. Богомолов, П. И. Самойленко. — 5-е изд., перераб. и доп. — Москва: Издательство Юрайт, 2019. — 401 с. — (Бакалавр. Прикладной курс). — ISBN 978-5-534-07001-9. — Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт].
3. Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник для прикладного бакалавриата / В. Е. Гмурман. — 12-е изд. — Москва: Издательство Юрайт, 2020. — 479 с. — (Бакалавр. Прикладной курс). — ISBN 978-5-9916-3461-8. — Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт].
4. Кремер, Н. Ш. Линейная алгебра: учебник и практикум для бакалавриата и специалитета / под редакцией Н. Ш. Кремера. — 3-е изд., испр. и

доп. — Москва: Издательство Юрайт, 2019. — 422 с. — (Бакалавр и специалист). — ISBN 978-5-534-08547-1. — Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт].

5. Кремер, Н. Ш. Линейная алгебра: учебник и практикум для среднего профессионального образования / Н. Ш. Кремер, М. Н. Фридман, И. М. Тришин; под редакцией Н. Ш. Кремера. — 3-е изд., испр. и доп. — Москва: Издательство Юрайт, 2019. — 422 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-10169-0. — Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт].

6. Кремер, Н. Ш. Математика для колледжей: учебное пособие для среднего профессионального образования / Н. Ш. Кремер, О. Г. Константинова, М. Н. Фридман; под редакцией Н. Ш. Кремера. — 10-е изд., перераб. и доп. — Москва: Издательство Юрайт, 2020. — 346 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-05640-2. — Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт].

7. Орлова, И. В. Линейная алгебра и аналитическая геометрия для экономистов: учебник и практикум для вузов / И. В. Орлова, В. В. Угрозов, Е. С. Филонова. — Москва: Издательство Юрайт, 2021. — 370 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-9916-9556-5. — Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт].

8. Орлова, И. В. Линейная алгебра и аналитическая геометрия для экономистов: учебник и практикум для прикладного бакалавриата / И. В. Орлова, В. В. Угрозов, Е. С. Филонова. — Москва: Издательство Юрайт, 2018. — 370 с. — (Бакалавр. Прикладной курс). — ISBN 978-5-9916-9556-5. — Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт].

9. Спирина, М.С. Дискретная математика: учебник для студ.учреждений сред. проф. образования/ М.С. Спирина, П.А. Спирин — 10-е изд., стер. — Москва: Издательский центр «Академия», 2019. — 368с. — ISBN-978-5-4468-9248-8. - Текст: непосредственный.

10. ЭБС Юрайт : электронная библиотечная система : сайт. <https://urait.ru> Режим доступа: для зарегистрир. пользователей. - Текст: электронный.

11. URL: <https://biblio-online.ru>. - Режим доступа: для зарегистрир. пользователей. - Текст: электронный.

12. Федеральный центр информационно-образовательных ресурсов: сайт - <http://fcior.edu.ru/>

13. ЦОР Единая коллекция: сайт. — Москва. - URL: <http://school-collection.edu.ru>

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ЛУГАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ ВЛАДИМИРА ДАЛЯ»

КОЛЛЕДЖ

Рассмотрено и утверждено
на заседании методической комиссии
естественно-математических дисциплин

Протокол от «__» _____ 20__ года № ____

Председатель комиссии

_____ С.В.Поперчук

УТВЕРЖДАЮ

Заместитель директора

_____ В.В.Захаров

«__» _____ 20__ г.

КОМПЛЕКТ ЗАДАНИЙ
для проведения промежуточной аттестации
в форме дифференцированного зачета

по учебной дисциплине

ЕН.01 Математика

по специальности

38.02.06 Финансы

для студентов второго курса
форма обучения заочная

Преподаватель _____ Е.Е.Ферапонтова

**ФГБОУ ВО «ЛУГАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ ВЛАДИМИРА ДАЛЯ»**

КОЛЛЕДЖ

Учебная дисциплина **ЕН.01 Математика**

Специальность **38.02.06 Финансы**

Курс 2

Форма обучения заочная

Вариант № 1

1. Процент. Нахождение процента от числа; числа по его процентам; процентное отношение двух чисел.

2. Сколько денег будет на вкладе через год, если положить 10000руб. под 12%?

3. В конкурсе принимают участие 6 экономистов. Сколькими способами могут распределиться призовые места (1,2 и 3 места) между ними?

4. Решите систему линейных уравнений
$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = -1, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = -2 \end{cases}$$

5. Найдите производную функции $y = \sqrt{1 - x^2}$.

6. Вычислите с помощью определенного интеграла площадь фигуры, ограниченной заданными линиями: $y = x^2 - 2$; $y = 0$. Сделайте чертеж.

Председатель методической комиссии _____ С.В.Поперчук
(подпись)

Преподаватель _____ Е.Е.Ферапонтова
(подпись)

**ФГБОУ ВО «ЛУГАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ ВЛАДИМИРА ДАЛЯ»**

КОЛЛЕДЖ

Учебная дисциплина **ЕН.01 Математика**

Специальность **38.02.06 Финансы**

Курс 2

Форма обучения заочная

Вариант № 2

1. Производная функции. Экономический смысл производной.
2. В заседании «круглого стола» участвуют 7 человек. Сколькими способами их можно рассадить за одним столом?
3. Найдите сумму зарплаты, если 13% подоходного налога составляют 3900 руб.?
4. Найдите сумму, разность и произведение матриц A и B , если $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$.
4. Исследуйте на экстремум и перегиб функцию $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2$.
5. Вычислите с помощью определенного интеграла площадь фигуры, ограниченной заданными линиями: $y = -x^2 + 2$; $y = 0$. Сделайте чертеж.

Председатель методической комиссии _____ С.В.Поперчук
(подпись)

Преподаватель _____ Е.Е.Ферапонтова
(подпись)

**ФГБОУ ВО «ЛУГАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ ВЛАДИМИРА ДАЛЯ»**

КОЛЛЕДЖ

Учебная дисциплина **ЕН.01 Математика**

Специальность **38.02.06 Финансы**

Курс 2

Форма обучения заочная

Вариант № 3

1. Формулы простого и сложного процентов.
2. Сколькими способами из 12 студентов группы можно выбрать старосту и заместителя старосты?
3. Сколько денег будет на вкладе через год, если положить 10000руб. под 15%?

4. Вычислите определитель $\begin{vmatrix} 5 & 1 & -3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix}$.

5. Найдите значение производной функции $y = x^2 \ln x$ в точке $x_0 = 1$.

6. Найдите интеграл $\int x \sin x dx$.

Председатель методической комиссии _____ С.В.Поперчук
(подпись)

Преподаватель _____ Е.Е.Ферапонтова
(подпись)

**ФГБОУ ВО «ЛУГАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ ВЛАДИМИРА ДАЛЯ»**

КОЛЛЕДЖ

Учебная дисциплина **ЕН.01 Математика**

Специальность **38.02.06 Финансы**

Курс 2

Форма обучения заочная

Вариант № 4

1. Решение экономических задач с применением матриц и систем линейных уравнений.

2. На каждой из шести карточек написаны буквы А, Б, И, Р, Ж. После перемешивания берут по одной карточке и кладут последовательно рядом. Найдите вероятность того, что получится слово «Биржа».

3. Найдите сумму зарплаты, если 13% подоходного налога составляют 5000 руб.?

4. Найдите обратную матрицу к матрице $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ и сделайте проверку.

5. Найдите производную функции $y = \frac{1}{2} e^{\sqrt{x}}$.

6. Вычислите интеграл $\int_0^1 (5 - 2x^3)x^2 dx$.

Председатель методической комиссии _____ С.В.Поперчук
(подпись)

Преподаватель _____ Е.Е.Ферапонтова
(подпись)